الكلية متعددة التخصصات الناظور

Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Cours d'algèbre 1 (M.I.P)

Chapitre 1 : Notions de logique

(Ce document ne peut en aucun cas remplacer les séances de cours en présentiel)

Pr. EL MEHDI BOUBA

Année universitaire :2023–2024

1. **Notions de logique**

1.1. **Proposition et Fonction propositionnelle.**

Définition 1.1. Une proposition (ou assertion) est une phrase soit **vraie**, soit **fausse**, pas les deux en même temps.

Remarque 1.2. À chaque proposition P on attribue une *valeur de vérité*, ainsi si P est vraie on lui attribue la valeur V (vrai) ou 1, sinon on lui attribue la valeur F (faux) ou 0.

Exemples 1. Considérons les phrases suivantes :
1. «Rabat est la capitale du Maroc.»
2. «$\pi \in \mathbb{Q}$.»
3. «$5+7=9$.»
4. «$2+3=5$.»
5. «Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des cotés de l'angle droit.»
6. «Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z|=1$.»
7. «Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$.»
8. «Quelle heure est-il ?»
9. «x étant un élément de $\mathbb{N}$, $x+3=12$.»

Les phrases (1), (4), (5), (7) sont des propositions vraies, les phrases (2), (3), (6) sont des propositions fausses, les phrases (8) et (9) ne sont pas des propositions.

Définition 1.3. Une **fonction propositionnelle** (on dit aussi **prédicat** ou encore **propriété**) sur un ensemble E est une expression contenant une ou plusieurs variables dans E et qui susceptible de devenir une proposition vraie ou fausse si l'on attribue à ces variables certaines valeurs particulières de l'ensemble E.

Exemples 2.
1. $P(x)$: $x \in \mathbb{R}$, $x^2=1$ est une fonction propositionnelle. On trouve des propositions vraies pour $x=1$ ou $x=-1$, et fausses dans les autres cas. On dit on a $P(1)$ et $P(-1)$.
2. $Q(x)$: $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 2$ est une fonction propositionnelle. On trouve des propositions vraies pour $x \in [2,+\infty[$, et fausses pour $x \in]-\infty, 2[$. On dit : on a $Q(a)$ pour tout $a \in [2,+\infty[$.
3. $R(x,y)$: $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $x^2=y$ est une fonction propositionnelle. $R(2,4)$ et $R(-2,4)$ sont des propositions vraies, tandis que $R(1,6)$ et $R(5,-9)$ sont fausses.

1.2. **Connecteurs logiques.**

Nous étudions ci-dessous des procédés qui permettent d'obtenir de nouvelles propositions (on dit parfois **proposition composée**) à partir d'autres connues.

1.2.1. **La négation.**

Définition 1.4. La négation d'une proposition P, notée «non$P$» ou «$\overline{P}$» ou «$\neg P$», est la proposition qui est vraie si P est fausse, et qui est fausse si P est vraie.

Les valeurs de vérité de «non$P$» sont indiquées dans le tableau suivant, appelé *table de vérité :*

P	1	0
$\overline{P}$	0	1

Exemple 1.5.

1. La négation de la proposition vraie «$5 \in \mathbb{N}$» est la proposition fausse «$5 \notin \mathbb{N}$».
2. La négation de la proposition fausse «$9 < 5$» est la proposition vraie «$9 \geq 5$».

1.2.2. **La conjonction.**

Définition 1.6. La conjonction de deux propositions P, Q est la proposition qui est vraie uniquement si P et Q sont vraies toutes les deux, et elle est notée : «P et Q» ou «$P \wedge Q$».

La table de vérité de «$P \wedge Q$» est la suivante :

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemple 1.7.

1. «$5 \in \mathbb{N}$ et $2 + 9 = 11$» est une proposition vraie.
2. «$\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ et $9 \geq 5$» est une proposition fausse.

Remarques 1.8. Soient P, Q et R trois propositions.

1. Les propositions «$P \wedge Q$» et «$Q \wedge P$» ont même valeur de vérité. On dit que la conjonction des propositions est *commutative*.
2. Les propositions «$(P \wedge Q) \wedge R$» et «$P \wedge (Q \wedge R)$» ont même valeur de vérité. On dit que la conjonction des propositions est *associative*.

1.2.3. **La disjonction.**

Définition 1.9. La disjonction de deux propositions P, Q est la proposition qui est fausse uniquement si P et Q sont fausses toutes les deux, et elle est notée : «P ou Q» ou «$P \vee Q$».

La table de vérité de «$P \vee Q$» est la suivante :

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemple 1.10.

1. «$5 \in \mathbb{N}$ ou $2 + 9 = 11$» est une proposition vraie.
2. «$\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ ou $9 \geq 5$» est une proposition vraie.
3. «$\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ ou $9 < 5$» est une proposition fausse.

Remarques 1.11. Soient P, Q et R trois propositions.

1. Les propositions «$P \vee Q$» et «$Q \vee P$» ont même valeur de vérité. On dit que la disjonction des propositions est *commutative*.
2. Les propositions «$(P \vee Q) \vee R$» et «$P \vee (Q \vee R)$» ont même valeur de vérité. On dit que la disjonction des propositions est *associative*.

1.2.4. **L'implication logique.**

Définition 1.12. Considérons deux propositions P, Q. La proposition «$\overline{P} \vee Q$» s'appelle une implication, et elle est fausse uniquement si P est vraie et Q est fausse, on la note : «$P \Longrightarrow Q$».

La table de vérité de «$P \Longrightarrow Q$» est la suivante :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exemple 1.13.

1. «$5 \in \mathbb{N} \Longrightarrow 2 + 9 = 11$» est une proposition vraie.
2. «$\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow 9 \geq 5$» est une proposition vraie.
3. «$\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow 9 < 5$» est une proposition vraie.
4. «$\sqrt{5} \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ 2 divise 5 » est une proposition fausse.

Remarques 1.14. Soient P et Q deux propositions.

1. Si P est fausse, alors «$P \Longrightarrow Q$» est toujours vraie. Tandis que si P est vraie, l'implication «$P \Longrightarrow Q$» est vraie seulement si Q est vraie. Donc :

   pour prouver que «$P \Longrightarrow Q$» est vraie, il suffit de prouver que, lorsque P est vraie, la proposition Q est vraie.
2. L'implication «$Q \Longrightarrow P$» est appelée la *réciproque* de l'implication «$P \Longrightarrow Q$».
3. L'implication «$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$» est appelée la *contraposée* de l'implication «$P \Longrightarrow Q$». Les implications «$P \Longrightarrow Q$» et «$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$» ont même valeur de vérité

Exercice. Soient P, Q et R trois propositions.

1. Démontrer, à l'aide d'une table de vérité, que l'implication suivante est toujours vraie. $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$.
2. Dresser les tables de vérité de $[(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow R]$ et de $[P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)]$. Qu'en concluez-vous ?

1.2.5. **L'équivalence logique.**

Définition 1.15. Considérons deux propositions P, Q. La proposition

$$«(P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P)»$$

s'appelle l'équivalence de P et Q, et elle est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses, on la note «$P \Longleftrightarrow Q$» et on lit

«P équivaut à Q» ou «P si et seulement si Q».

La table de vérité de «$P \iff Q$» est la suivante :

P	Q	$P \iff Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exemple 1.16.

1. «$5 \in \mathbb{N} \iff 2 + 9 = 11$» est une proposition vraie.
2. «$\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \iff 9 \geq 5$» est une proposition fausse.
3. «$\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \iff 9 < 5$» est une proposition vraie.
4. «$\sqrt{5} \in \mathbb{R} \iff$ 2 divise 5 » est une proposition fausse.

Exercice. Soient P, Q et R trois propositions.

1. Démontrer, à l'aide d'une table de vérité, que l'implication suivante est toujours vraie. $[(P \iff Q)$ et $(Q \iff R)] \implies (P \iff R)$.
2. Dresser les tables de vérité de $[(P \iff Q) \iff R]$ et de $[P \iff (Q \iff R)]$. Qu'en concluez-vous ?

1.3. **Lois Logiques.**

Définition 1.17. Une loi logique (on dit aussi **une tautologie**) est une proposition composée avec plusieurs propositions P, Q, R, ..., à l'aide des connecteurs logique et qui est **toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité de** P, Q, R, ...

Nous citons quelques exemples de lois logiques. Soient P, Q, et R des propositions.

1. $P \iff \overline{\overline{P}}$,
2. $(P \wedge Q) \iff (Q \wedge P)$ (commutativité de **et**)
3. $[(P \wedge Q) \wedge R] \iff [P \wedge (Q \wedge R)]$ (associativité de **et**)
4. $(P \vee Q) \iff (Q \vee P)$ (commutativité de **ou**)
5. $[(P \vee Q) \vee R] \iff [P \vee (Q \vee R)]$, (associativité de **ou**)
6. $[P \wedge (Q \vee R)] \iff [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$, (distributivité de **et** par rapport à **ou**)
7. $[P \vee (Q \wedge R)] \iff [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$, (distributivité de **ou** par rapport à **et**)
8. $[(P \implies Q) \wedge (Q \implies R)] \implies (P \implies R)$, (transitivité de l'implication)
9. $(P \implies Q) \iff (\overline{Q} \implies \overline{P})$, (principe de la contraposition)
10. $[P \wedge (P \implies Q)] \implies Q$, (principe de la déduction)
11. $[(P \iff Q)$ et $(Q \iff R)] \implies (P \iff R)$,
12. $\overline{(P \wedge Q)} \iff (\overline{P} \vee \overline{Q})$,
13. $\overline{(P \vee Q)} \iff (\overline{P} \wedge \overline{Q})$.

Les lois (12) et (13) sont dites lois de Morgann.

1.4. **Quantificateurs.**

En mathématiques on considère souvent des énoncés comme :
- «il existe un réel x tel que $x^2 = 1$»,
- «pour tout entier naturel n, on a $n^2 \geq n$»,

- «pour tout réel x non nul, il existe un réel y tel que $xy = 1$», etc.
Il est fondamental de comprendre ce que signifient ces énoncés, de savoir les manipuler, et de savoir les nier.

Définition 1.18. Soit $P(x)$ une propriété définie sur un ensemble E.

1. La proposition «pour tout élément x de E, $P(x)$ est vraie» s'écrit sous la forme mathématique suivante :
$$«\forall x \in E, P(x)».$$
Le symbole $\forall$ s'appelle *le quantificateur universel.*
2. La proposition «il existe au moins un élément x de E, tel que $P(x)$ est vraie» s'écrit sous la forme mathématique suivante :
$$«\exists x \in E, P(x)» \text{ ou aussi } «\exists x \in E/P(x)»$$
Le symbole $\exists$ s'appelle *le quantificateur existentiel.*
3. La proposition «il existe un et un seul élément x de E, tel que $P(x)$ est vraie» sous la forme mathématique suivante :
$$«\exists! x \in E, P(x)» \text{ ou aussi } «\exists! x \in E/P(x)».$$

Les quantificateurs permettent donc de transformer une fonction propositionnelle en une proposition et conduisent à des énoncés très précis. Toutefois, ils doivent être considérer comme des symboles logiques et non pas comme des abréviations et suivent des règles d'emploi strictes.

Exemple 1.19.

1. «$\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ est divisble par 2 » est une proposition vraie.
2. «$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ » est une proposition fausse.
3. «$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3 = 0$ » est une proposition fausse.
4. «$\exists z \in \mathbb{C}, z^2 + 3 = 0$ » est une proposition vraie.
5. «$\exists! a \in \mathbb{Q}/\frac{2}{3}a = 1$ » est une proposition vraie.

Remarque 1.20. On peut construire des propositions contenant plusieurs quantificateurs :
$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R}),\ (x^2+1)y = 2, \tag{1}$$
se lit :« pour tout x de $\mathbb{R}$, il existe au moins un élément y de $\mathbb{R}$ tel que $(x^2+1)y = 2$.» C'est une proposition vraie car quel que soit x_0 réel donné, l'équation d'inconnue réelle y : $(x_0^2+1)y = 2$ admet une solution $y = \dfrac{2}{x_0^2+1}$.
Par contre si on change l'ordre des quantificateurs :
$$(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R}),\ (x^2+1)y = 2, \tag{2}$$
se lit :« il existe au moins un élément y de $\mathbb{R}$ tel que pour tout x de $\mathbb{R}$ on ait $(x^2+1)y = 2$.» C'est une proposition fausse. Car s'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on ait $(x^2+1)y_0 = 2$, cette égalité serait verifiée par exemple pour $x = 0$ d'où $y_0 = 2$, pour $x = 1$ d'où $y_0 = 1$. La valeur trouvée de y_0 n'est pas la même!!

Remarque 1.21. L'ordre des quantificateurs de natures différentes est essentiel. Par contre l'ordre des quantificateurs de même nature n'est pas important, i.e., on peut permuter les quantificateurs de même nature.

Proposition 1.1. *Soit $P(x)$ une propriété définie sur un ensemble E. Alors, on a les équivalences suivantes :*

1. $[non(\forall x \in E, P(x))] \Longleftrightarrow [\exists x \in E, non(P(x))]$.
2. $[non(\exists x \in E, P(x))] \Longleftrightarrow [\forall x \in E, non(P(x))]$.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.
2. $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ f(x) > M$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \Longrightarrow x \leq 0$.

Solution.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
2. $\exists M > 0,\ \forall A > 0,\ \exists x \geq A,\ f(x) \leq M$.
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ et $x > 0$.

Proposition 1.2. *Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés définie sur un ensemble E. Alors, on a :*

1. $[\forall x \in E, P(x) \wedge Q(x)] \Longleftrightarrow [(\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))]$.
2. $[\exists x \in E, P(x) \vee Q(x)] \Longleftrightarrow [(\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x))]$.
3. $[\forall x \in E, P(x) \vee Q(x)] \begin{array}{c}\Longleftarrow \\ \not\Longrightarrow\end{array} [(\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))]$.
4. $[\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x)] \begin{array}{c}\not\Longleftarrow \\ \Longrightarrow\end{array} [(\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x))]$.

On dit : on peut distribuer $\forall$ sur « et » et $\exists$ sur « ou », mais on ne peut pas distribuer $\forall$ sur « ou » et $\exists$ sur « et ».

1.5. **Raisonnements.**

Dans toute cette section P , Q et R désignent des propositions.

1.5.1. **Raisonnement direct.**

On veut montrer que l'assertion «$P \Rightarrow Q$» est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple 1.22.
Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{Q}^2 : a + b \in \mathbb{Q}$.

Solution.
Comme a et b sont dans $\mathbb{Q}$, alors il existe p, $q \neq 0$, n et $m \neq 0$ dans $\mathbb{Z}$ tels que $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{n}{m}$. Par suite $a + b = \frac{p}{q} + \frac{n}{m} = \frac{pm+nq}{qm}$. Or $pm + nq \in \mathbb{Z}$ et $qm \in \mathbb{Z}^*$, donc $a + b \in \mathbb{Q}$.

1.5.2. **Raisonnement par contraposition.**

On sait que

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}),$$

donc pour montrer que «$P \Longrightarrow Q$» est une proposition vraie, il est quelquefois plus commode de montrer que sa contraposé «$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$» est vraie.

Exemple 1.23.
1. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a+b \neq 0$, montrons que $a \neq -\frac{1}{2}b \Longrightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$.
2. Soient a et b deux entiers naturels non nuls, montons que $(ab = 1 \Longrightarrow a = b = 1)$.

Solution.
1. Montrons que $\frac{a-b}{a+b} = -3 \Longrightarrow a = -\frac{1}{2}b$.
On a :

$$\begin{aligned} \tfrac{a-b}{a+b} = -3 &\Longrightarrow a - b = -3(a+b) \\ &\Longrightarrow a - b = -3a - 3b \\ &\Longrightarrow 4a = -2b \\ &\Longrightarrow a = \tfrac{-1}{2}b. \end{aligned}$$

Donc $a \neq -\frac{1}{2}b \Longrightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$.
2. Supposons que $a \neq 1$ ou $b \neq 1$, alors $(a \geq 2$ et $b \geq 1)$ ou $(a \geq 1$ et $b \geq 2)$. Dans les deux cas on a : $ab \geq 2$, donc

$$a \neq 1 \text{ ou } b \neq 1 \Longrightarrow ab \neq 1.$$

D'où le résultat.

1.5.3. **Raisonnement par l'absurde.**
Le raisonnement par l'absurde est un raisonnement qui permet de démontrer qu'une proposition est vraie en montrant que sa négation est fausse. Il s'appuie sur la règle logique que : Si «*nonP*» est fausse, alors P est vraie.

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, le raisonnement consiste à supposer que la négation $\overline{P}$ est vraie, et on montre que cela entraîne une proposition absurde, une manifestement fausse ou une contradiction. On conclut donc que l'affirmation contraire est fausse et par suite l'affirmation initiale est vraie. Le schéma du raisonnement par l'absurde est le suivant :

Quand «$\overline{P} \Longrightarrow Q$» est une proposition vraie, et Q est une proposition fausse, on peut affirmer que P est une proposition vraie.

Exemple 1.24. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Solution.
Supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, où p et q sont premiers entre eux.
Alors on a $p^2 = 2q^2$, d'où p^2 est un nombre pair et par suite p est pair aussi, puisque si p était impair il va s'écrire donc $p = 2k+1$, d'où $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ serait aussi impair. Ce qui entraîne que $p = 2k$ est pair. Alors $q^2 = 2k^2$, donc q^2 est pair, et donc q est aussi pair. Or ceci nous amène à une contradiction, car on a supposé que p et q sont premiers entre eux, et on a montré que 2 divise ces nombres. Par suite l'hypothèse faite est fausse.

1.5.4. **Raisonnement par disjonction des cas.**
Pour montrer que R est vraie, il suffit de montrer que :
«$P \vee Q$» est vraie et que les implications «$P \Longrightarrow R$» et «$Q \Longrightarrow R$» sont vraies.

Exemple 1.25. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Solution.
puisque $n \in \mathbb{N}$, alors n est pair ou n est impair, ainsi on distingue les deux cas suivants :
-Si n est pair, alors $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ et ainsi $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}(n+1) \in \mathbb{N}$.
-Si n est impair, alors $n+1$ est pair d'où $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$ et ainsi $\frac{n(n+1)}{2} = n\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$.

1.5.5. **Raisonnement par négation. Contre-exemple.**
On sait que si $P(x)$ est une propriété sur un ensemble E, alors on a :

$$\text{non}[\forall x \in E,\ P(x)] \Longleftrightarrow [\exists x \in E, non(P(x))].$$

Donc pour montrer que «$\forall x \in E,\ P(x)$» est fausse, il suffit de montrer que sa négation «$\exists x \in E, \overline{P}(x)$» est vraie. Pour cela, il suffit de fournir un contre-exemple, i.e., trouver un élément $x_0 \in E$ vérifiant $\overline{P}(x_0)$.

Exemple 1.26. Montrer que la proposition $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x + \frac{1}{x} \geq 2$ est fausse.

Solution.
On prend par exemple $x_0 = -1$, pour trouver la contradiction $-2 \geq 2$.

1.5.6. **Raisonnement par récurrence.**
Lorsque l'on doit montrer une propriété $P(n)$ qui dépend d'un paramètre entier n, il est très souvent utile de raisonner par récurrence. Pour cela, on utilise le principe de récurrence.
Principe de récurrence. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Considérons une propriété $P(n)$ définie pour tous les entiers naturels $n \geq n_0$. Si

1. Initialisation : $P(n_0)$ est vraie.
2. Hérédité : Pour tout $n \geq n_0$, l'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie.
   Alors
3. Conclusion : pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple 1.27. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solution.
Pour $n \geq 1$, on note $P(n)$ la propriété :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On démontre par récurrence sur n que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

- **Initialisation**. Pour $n = 1$, nous avons $\sum\limits_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Donc $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité**. Fixons $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ (car par } P(n) \text{ nous savons } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}) \\
&= (n+1)(\frac{n}{2} + 1) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Donc, $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion**. Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.