الكلية متعددة التخصصات الناظور
Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Cours d'algèbre 1 (M.I.P)

Chapitre 2 : Théorie des ensembles

(Ce document ne peut en aucun cas remplacer les séances de cours en présentiel)

Pr. EL MEHDI BOUBA

Année universitaire :2023–2024

2. **Théorie des ensembles**

Dans ce chapitre, nous introduisons le language des ensembles. Ce language, introduit par le mathématicien allemand Georg Cantor (né le 3 mars 1845 à Saint-Pétersbourg et mort le 6 janvier 1918) à la fin du XIX[e] siècle, est parmi les notions de bases des mathématiques, il a envahi toutes les branches des mathématiques et il est utilisé dans tous les niveaux de l'enseignement. Nous l'utilisons non seulement il est commode, mais il est impossible de l'ignorer.

2.1. **Ensembles.**

La notion d'ensemble est une notion qu'on ne pas définir d'autres notions, c'est une notion première. Sans entrer dans le détail des théories axiomatiques des ensembles, nous nous contenterons de la définition suivante.

Définition 2.1. Une collection d'objets est dite *ensemble* ; ces objets s'appellent les éléments de l'ensemble.

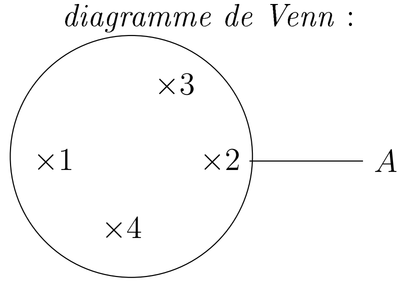
Notations.

- Un ensemble est souvent noté par une lettre majuscule : A, B, ... Par contre un élément est noté par une lettre minuscule : x, y, a, b,....
- Si un objet x est un élément d'un ensemble A, alors on écrit $x \in A$ (x *appartient à* A).
- Si un objet x n'est pas un élément d'un ensemble A, alors on écrit $x \notin A$, (x *n'appartient pas à* A).

Remarque 2.2. Il existe deux façons de décrire un ensemble E :

- soit en donnant la liste des éléments de cet ensemble, on dit qu'on a écrit l'ensemble en extension, $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- soit en donnant une propriété qui caractérise les éléments de l'ensemble, on dit qu'on a écrit l'ensemble en compréhension, $E = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ est pair}\}$.

Soit l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$, on représente A par un diagramme qu'on appelle *diagramme de Venn* :



Exemples 3.

1. Les entiers naturels 0, 1, 2, 3, ..., forment un ensemble noté $\mathbb{N}$.
2. Les entiers relatifs ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., forment un ensemble noté $\mathbb{Z}$.
3. Les nombres décimaux, les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, forment un ensemble noté $\mathbb{D}$.

4. Les nombres rationnels, les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, forment un ensemble noté $\mathbb{Q}$.
5. Les nombres réels forment un ensemble noté $\mathbb{R}$.
6. Les nombres complexes forment un ensemble noté $\mathbb{C}$.
7. L'ensemble qui contient un seul élément a se note $\{a\}$, l'ensemble qui contient deux éléments a et b se note $\{a, b\}$; etc.
8. L'étoile '*' enlève le zéro. Par exemple $\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$.
9. L'ensemble qui ne contient aucun élément est dit : *l'ensemble vide*. Il est noté $\varnothing$ ou encore $\{\}$.

Définition 2.3. Soient A et B deux ensembles.

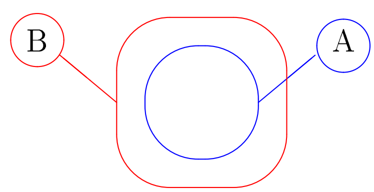
1. A et B sont dits égaux, s'ils contiennent les mêmes éléments, et on écrit $A = B$.
2. Si A contient un nombre fini d'éléments, alors A est dit *un ensemble fini*. Le nombre d'éléments de A est appelé *cardinal de* A, et est noté $card(A)$ ou $|A|$ ou $\#A$.

2.2. **Opérations élémentaires sur les ensembles.**

2.2.1. **Inclusion.**

Définition 2.4. Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B si et seulement si tout élément de A est élément de B, et on écrit $A \subset B$ ou $B \supset A$. On dit aussi que A est une partie de B.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B.$$



Pour montrer l'inclusion $A \subset B$, il faut montrer que tout élément de A appartient à B.

Remarques 2.5. Soient A, B et C trois ensembles.

- Si $A \neq B$ et $A \subset B$, alors on écrit $A \subsetneq B$.
- Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.
- $A \subset B$ et $B \subset A \Leftrightarrow A = B$.
- S'il existe un $x \in A$ tel que $x \notin B$, alors on dit que A n'est pas inclus dans B et on écrit $A \not\subset B$.

Exercice Soient $A =]-2, 5[$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 10 < 0\}$. Montrer que $A = B$. On doit donc montrer la double inclusion $A \subset B$ et $B \subset A$.

Exemples 4.

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z}^*$.
- L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble A : $\varnothing \subset A$.
- Chaque ensemble A est inclus dans lui-même : $A \subset A$.

2.2.2. **Ensemble des parties d'un ensemble.**

Définition 2.6. L'ensemble qui contient toutes les parties d'un ensemble E donné est dit *l'ensemble des parties de* E, on le note $\mathcal{P}(E) = \{A | A \subset E\}$.

Exemple 2.7.

- L'ensemble des parties de $E = \varnothing$ est : $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.
- L'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{a\}$ est : $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}\}$.
- L'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{a, b\}$ est : $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
- L'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ est : $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
- L'ensemble $E = \{\varnothing\}$ n'est pas vide, et l'ensemble de ses parties est : $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.
- $]-2, +\infty[\in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $]-2, 7[\in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

NB. Ne pas confondre $\varnothing$ et $\{\varnothing\}$, $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$ par contre $\mathrm{card}(\{\varnothing\}) = 1$.

Remarque 2.8. Pour tout ensemble A, on a :

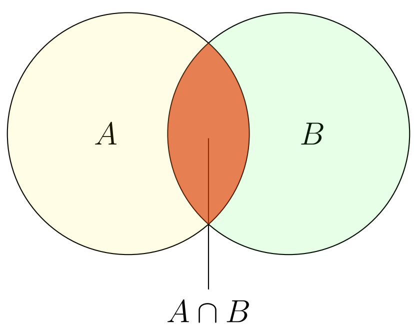
- $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ et $A \in \mathcal{P}(A)$.
- Si $a \in A$, alors $\{a\} \subset A$ et $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$.
- $B \subset A \Longleftrightarrow B \in \mathcal{P}(A)$.

2.2.3. ***Intersection.***

Définition 2.9. Soient deux ensembles A et B, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B est appelé intersection de A et de B et est noté $A \cap B$. Ainsi on a :

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ et } x \in B\} \text{ et } x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B.$$

Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont *disjoints*.



Exemple 2.10. Si $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{a, e, c, f, g\}$, alors $A \cap B = \{a, c\}$.

Proposition 2.1. *Soient A, B et C trois ensembles. Alors on a :*

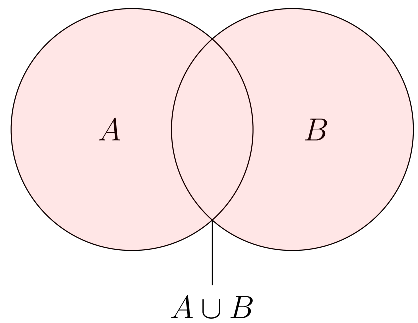
1. *$A \cap B = B \cap A$, on dit l'intersection est commutative.*
2. *$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, on dit l'intersection est associative.*
3. *$A \cap A = A$ et $A \cap \varnothing = \varnothing$.*
4. *$(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$.*
5. *$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$.*

Preuve. Simple à vérifier. $\square$

2.2.4. ***Réunion***.

Définition 2.11. Soient deux ensembles A et B, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B est appelé *réunion* de A et de B, et est noté $A \cup B$. Ainsi on a :

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\} \text{ et } x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$



Exemple 2.12. Si $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{a, e, c, f, g\}$, alors $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Proposition 2.2. *Soient A, B et C trois ensembles. Alors on a :*

1. $A \cup B = B \cup A$*, on dit la réunion est commutative.*
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$*, on dit la réunion est associative.*
3. $A \cup A = A$ *et* $A \cup \varnothing = A$*, on dit la réunion admet* $\varnothing$ *comme élément neutre.*
4. $A \subset A \cup B$ *et* $B \subset A \cup B$*.*
5. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$*.*

Preuve. Simple à vérifier. □

Proposition 2.3. *Soient A, B et C trois ensembles.*

1. *L'intersection est distributive par rapport à la réunion, c'est-à-dire que :*
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$*.*
2. *La réunion est distributive par rapport à l'intersection, c'est-à-dire que :*
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$*.*

Preuve.
1. Soit $x \in A \cap (B \cup C)$, donc $x \in A$ et $x \in B \cup C$, c'est-à-dire que $x \in A$ et ($x \in B$ ou $x \in C$). Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$; si $x \in C$, alors $x \in A \cap C$. Par suite, dans les deux cas $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Réciproquement, soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, donc $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, d'où $x \in A$ et $x \in B \cup C$; par suite $x \in A \cap (B \cup C)$. De même, si $x \in A \cap C$, alors $x \in A$ et $x \in C$, d'où $x \in A$ et $x \in B \cup C$; par suite $x \in A \cap (B \cup C)$.

2. La preuve est analogue à la précédente. □

Remarque 2.13 (Formule de Poincaré). Si A et B sont deux ensembles finis, alors l'ensemble $A \cup B$ est fini et on a :

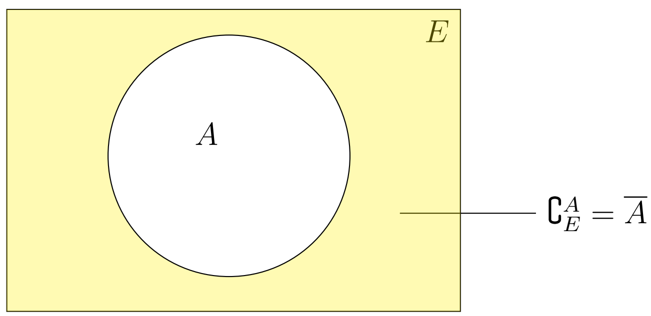
$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B).$$

Car si on ajoute $\operatorname{card}(A)$ et $\operatorname{card}(B)$, on compte deux fois les éléments de $A \cap B$. On doit donc retrancher $\operatorname{card}(A \cap B)$ pour obtenir le cardinal de $A \cup B$.

2.2.5. ***Complémentaire.***

Définition 2.14. Soit A une partie d'un ensemble E. L'ensemble des éléments qui appartiennent à E et qui n'appartiennent pas à A est appelé *complémentaire* de A par rapport à E, et est noté $\overline{A}$ ou $\complement_E^A$ ou A^C. Ainsi on a :

$$\complement_E^A = \{x \in E \mid x \notin A\}, \qquad x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin A$$



Exemples 5.

- Si $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et $A = \{a, b, c, d\}$, alors $\complement_E^A = \{e, f, g\}$.
- $\complement_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}^*} = \{0\}$ et $\complement_{\mathbb{R}}^{\{0\}} = \mathbb{R}^*$.

Remarque 2.15. Soit A une partie d'un ensembles E.

1. $A \cap \overline{A} = \varnothing$, car sinon on aura un x qui appartient à A et à $\overline{A}$.
2. $A \cup \overline{A} = E$.

Proposition 2.4. *Soient A et B deux parties d'un ensemble E.*

1. $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.
2. $A \cap B = \varnothing \iff A \subset \overline{B}$.
3. $A \cup B = E \iff \overline{B} \subset A$.
4. $\complement_E^{\complement_E^A} = A$, *i.e.*, $\overline{\overline{A}} = A$.
5. $\complement_E^{\varnothing} = E$ *et* $\complement_E^E = \varnothing$.
6. $\complement_E^{A \cup B} = \complement_E^A \cap \complement_E^B$ *et* $\complement_E^{A \cap B} = \complement_E^A \cup \complement_E^B$. *Ces formules se généralisent à un nombre quelconque d'ensembles.*

Preuve. 1. Supposons que $A \subset B$ et montrons que $\overline{B} \subset \overline{A}$. Soit $x \in \overline{B}$, donc $x \notin B$; or $A \subset B$, d'où $x \notin A$, par suite $x \in \overline{A}$. Donc $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$ c'est-à-dire que $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Réciproquement, supposons que $\overline{B} \subset \overline{A}$ et montrons que $A \subset B$. Soit $x \in A$, donc $x \notin \overline{A}$; ceci implique que $x \notin \overline{B}$, puisque $\overline{B} \subset \overline{A}$. Par suite $x \in B$, d'où $x \in A \Rightarrow x \in B$, c'est-à-dire que $A \subset B$.

2. $\Longrightarrow$), soit $x \in A$, alors $x \notin B$, d'où $x \in \overline{B}$, c-à-d, $A \subset \overline{B}$.

$\Longleftarrow$), si $A \cap B$ est non vide, alors il existe $x \in A \cap B$. Donc $x \in A$ et $x \in B$, ceci implique que $x \in A$ et $x \notin \overline{B}$, d'où $A \not\subset \overline{B}$, absurde.

3. Utiliser 2).

4. $$\begin{aligned} x \in \complement_E^{\complement_E^A} &\Longleftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin \complement_E^A \\ &\Longleftrightarrow x \in E \text{ et } x \in A. \end{aligned}$$

Donc $\complement_E^{\complement_E^A} = A$.

5. Simple.

6. Soit $x \in \complement_E^{A\cup B}$, alors $x \in E$ et $x \notin A \cup B$. Donc $x \notin A$ et $x \notin B$, d'où $x \in \complement_E^A$ et $x \in \complement_E^B$, c'est-à-dire $x \in \complement_E^A \cap \complement_E^B$.

Réciproquement, soit $x \in \complement_E^A \cap \complement_E^B$; donc $x \in E$, $x \in \complement_E^A$ et $x \in \complement_E^B$, d'où $x \in E$, $x \notin A$ et $x \notin B$. Donc $x \in E$ et $x \notin A \cup B$, i.e, $x \in \complement_E^{A\cup B}$. Ceci établit la première formule. Pour la deuxième, en appliquant la première, on trouve que :

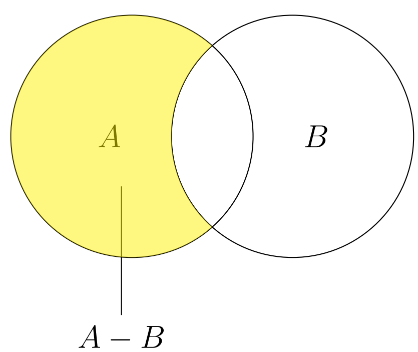
$$\complement_E^{\complement_E^A \cup \complement_E^B} = \complement_E^{\complement_E^A} \cap \complement_E^{\complement_E^B} = A \cap B.$$

Ce qui implique que $\complement_E^A \cup \complement_E^B = \complement_E^{A\cap B}$. □

2.2.6. ***Différence de deux ensembles.***

Définition 2.16. Soient deux ensembles A et B, l'ensembles des éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B est appelé *différence* de A et de B, et est noté $A\backslash B$ ou $A - B$.

$$A\backslash B = \{x | x \in A \text{ et } x \notin B\} \quad \text{c-à-d} \quad x \in A\backslash B \Longleftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B.$$



Exemple 2.17. Si $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{a, e, c, f, g\}$, alors $A\backslash B = \{b, d\}$ et $B\backslash A = \{e, f, g\}$.

Proposition 2.5. *Soient A et B deux parties d'un ensemble E.*

1. $\complement_E^A = E - A$
2. $A - B = A \cap \overline{B}$.
3. $A - B = \varnothing \Longleftrightarrow A \subset B$.

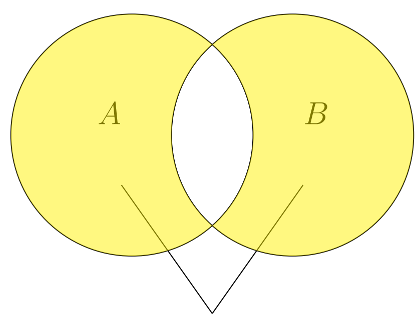
Preuve.
1. On a $x \in \complement_E^A \Longleftrightarrow x \in E$ et $x \notin A \Longleftrightarrow x \in E - A$.
2. Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in A - B &\Longleftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B \\ &\Longleftrightarrow x \in A \text{ et } x \in \complement_E^B = \overline{B} \\ &\Longleftrightarrow x \in A \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

Donc $A - B = A \cap \overline{B}$.
3. Admettons que $A - B = \varnothing$. Si $A \not\subset B$, alors il existe $x \in A$ et $x \notin B$, d'où $x \in A - B$; ce qui est absurde. □

Définition 2.18 (Différence symétrique)**.** Soient deux ensembles A et B, l'ensemble $(A - B) \cup (B - A)$ est appelé *différence symétrique* de A et B, et est noté $A \vartriangle B$.

$$A \vartriangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{x | x \in (A - B) \text{ ou } x \in (B - A)\}.$$



Exemple 2.19. Si $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $B = \{a, c, e, f, g\}$, alors $A - B = \{b, d\}$ et $B - A = \{f, g\}$; donc $A \vartriangle B = \{b, d, f, g\}$.

Proposition 2.6. *Soient des parties A, B et C d'un ensemble E.*
1. $A \vartriangle B = B \vartriangle A$, *la différence symétrique est commutative.*
2. $A \vartriangle (B \vartriangle C) = (A \vartriangle B) \vartriangle C$, *la différence symétrique est associative.*
3. $A \vartriangle \varnothing = A$, *la différence admet un élément neutre.*
4. $A \vartriangle A = \varnothing$,
5. $A \vartriangle B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cup B) - (A \cap B)$,
6. $A \vartriangle B = \varnothing \Longleftrightarrow A = B$.

Preuve.
1. On a $A \vartriangle B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \vartriangle A$.
2. $(A \vartriangle B) \vartriangle C$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans $A \vartriangle B$ et pas dans C ou dans C et pas dans $A \vartriangle B$ ou encore $(A \vartriangle B) \vartriangle C$ est l'ensemble des éléments de E qui sont (dans exactement une des deux parties A ou B et pas dans C) ou (dans C et (ni dans A, ni dans B ou dans A et B à la fois)). En résumé, $(A \vartriangle B) \vartriangle C$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans exactement une des trois parties A, B ou C ou dans les trois parties. Par symétrie des rôles de A, B et C, il en est de même de $(B \vartriangle C) \vartriangle A = A \vartriangle (B \vartriangle C)$. Ceci montre que $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$.

3 et 4. Simples.

5. On a
$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= [(A \cap \overline{B}) \cup B] \cap [(A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}] \\ &= [(A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)] \cap [(A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})] \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{B \cap A}) \\ &= (A \cup B) - (B \cap A) \end{aligned}$$
□

Remarque 2.20. L'intersection est distributive par rapport à la différence symétrique : $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$. Ce qui n'est pas vrai pour la réunion.

2.3. **Produit cartésien d'ensembles.**

Définition 2.21. Soient x et y deux objets. On appelle *couple* (x, y) la suite d'objets dont le premier élément est x et le deuxième est y.
Soient deux ensembles A et B. On appelle *produit cartésien* de A et B l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$; cette ensemble est noté $A \times B$.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Remarque 2.22. les couples (a, b) et (x, y) sont égaux , i.e., $(a, b) = (x, y)$ si et seulement si $a = x$ et $b = y$.

Exemples 6.

1. Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b, c\}$, alors on a :
   $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$
   $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
   $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
   $B \times B = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c),(c, a), (c, b), (c, c)\}$.
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{R} = \{(n, x) \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}\}$.

Remarque 2.23. Soient A et B deux ensembles.

- Il ne faut pas confondre la notion du couple avec la notion d'ensemble $\{x, y\}$. On a $\{x, y\} = \{y, x\}$ mais $(x, y) \neq (y, x)$.
- En général on a : $A \times B \neq B \times A$.

Proposition 2.7. *Soient A, B, C et D des ensembles quelconques.*

1. *Si $A \subset C$ et $B \subset D$, alors $A \times B \subset C \times D$.*
2. *$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.*
3. *$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.*
4. *$A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$.*
5. *$A \times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$.*

Preuve. Simple à vérifier. □

Remarque 2.24. Si A et B sont deux ensemble finis, alors $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A)\text{card}(B)$.

Définition 2.25. Soient A et B deux ensembles.

1. On appelle diagonale de $A \times A$ l'ensemble des couples (x, x), où $x \in A$.

2. Toute partie non vide Γ de $A \times B$ est appelée un **graphe de A vers B**. Autrement dit, tout élément de Γ est un couple ordonné (x, y) où $x \in A$ et $y \in B$.

Exemple 2.26. Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b, c\}$, alors

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

1. La partie $\Gamma_1 = \{(1, a), (1, b)\}$ est un graphe de A vers B.
2. La partie $\Gamma_2 = \{(1, b), (1, c), (2, a), (2, b)\}$ est un autre graphe de A vers B.
3. La partie $\Gamma_3 = \{(2, c)\}$ est un troisième graphe de A vers B.
4. La diagonale de $A \times A$ est $\{(1, 1), (2, 2)\}$
5. La diagonale de $B \times B = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.

Généralisation.

Définition 2.27. Soient n objets x_1, x_2, ..., x_n, la suite ordonnée $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est dit un n-uplet.
Soient alors n ensembles A_1, A_2, ..., A_n ; l'ensemble des suites ordonnées $(x_1, x_2, ..., x_n)$ telles que $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, ..., $x_n \in A_n$, s'appelle le produit cartésien des ensembles A_1, A_2, ..., A_n et se note $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, on note aussi $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} A_i$.

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in A_i \text{ pour tout } i\}.$$

Notation. Si $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, alors le produit $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ se note A^n. Par exemple $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se note $\mathbb{R}^2$, et $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se note $\mathbb{R}^4$, etc.

2.4. **Partition d'un ensemble.**

Définition 2.28. Une partition d'un ensemble E est une famille de parties non vides de E, disjointes deux à deux, et dont la réunion est l'ensemble E tout entier.
Autrement dit, les parties A_1, A_2, ..., A_k de E forment une partition de E en k classes si et seulement si :

1. $\forall 1 \leq i \leq k$, $A_i \neq \varnothing$.
2. $\forall 1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.
3. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{i=k} A_i = E$.

Exemples 7.

1. Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   i. Les parties de E : $A = \{1, 2\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$ forment une partition de E, car A et B sont non vides, $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = E$.
   ii. Les parties de E : $A = \{1, 2\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$ ne forment pas une partition de E, car $A \cup B \neq E$.
   iii. Les parties de E : $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4\}$ et $C = \{5, 6\}$ forment une partition de E, car A, B et C sont non vides, $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ et $B \cap C = \varnothing$, $A \cup B \cup C = E$.
2. Pour $E = [1, 7]$, les intervals $A = [1, 2[$, $B = [2, 4]$ et $C =]4, 7]$ forment une partition de E.

3. L'ensemble des entiers naturels pairs et l'ensemble des entiers naturels impairs constituent une partition de $\mathbb{N}$.

Remarque 2.29. Si A est une partie non vide d'un ensemble non vide E et $A \neq E$, alors A et $\overline{A}$ est une partition de E. En effet, $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = E$.

2.5. **Recouvrement d'un ensemble.**

Définition 2.30. Soit E un ensemble. Une famille d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$, I non vide, est un recouvrement de E si $E \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, c'est-à-dire telle que tout élément de E appartient à au moins l'un des A_i.

Exemples 8.

1. Soient un ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $A = \{1, 2, 3\}$ une partie de E, alors $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 5\}$ et $D = \{1, 3, 5\}$ est un recouvrement de A, car $A \subset B \cup C \cup D$.
2. La famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $A_n = \{0, \cdots, n\}$, est un recouvrement de $\mathbb{N}$; mais $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une partition de $\mathbb{N}$.
3. Si $E =]0,1]$, alors la famille des parties $[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$ de E, où $n > 0$, forme un recouvrement de E.

Remarque 2.31. Une partition de E est un recouvrement de E.

Définition 2.32. Soit E un ensemble. Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux recouvrements de E. On dit que le second recouvrement est plus fin que le premier si pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que $B_j \subset A_i$.

Proposition 2.8. *Soit E un ensemble. Si $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ sont deux recouvrements de E, alors la famille $(A_i \cap B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est encore un recouvrement de E.*

Preuve. Soit $x \in E$, donc il existe $(i, j) \in I \times J$ tel que $x \in A_i$ et $x \in B_j$. D'où $x \in A_i \cap B_j$. De plus $(A_i \cap B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est plus fin que chacun d'eux. □