Chapitre 1.

Espaces Vectoriels

1 Espaces Vectoriels : Généralités

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Loi de composition interne

Définition : Soit E un ensemble non vide. On appelle *loi de composition interne* (en abrégé *LCI*) sur E toute application de $E \times E$ dans E.

C'est donc une application qui à chaque couple (x, y) d'éléments de E fait correspondre un unique élément $x * y$ de E, où $*$ dénote le signe de la loi.

Exemples :

1) Soit $E = \mathbb{R}^n$ produit cartésien d'ordre n de $\mathbb{R}$. L'addition

$$x + y = (x_1 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

de deux $n-$ uplets $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$ est une LCI sur $\mathbb{R}^n$.

2) Sur $E = \mathbb{R}^*$ la division est une LCI :

$$(x, y) \mapsto \frac{x}{y} \qquad \text{(division de } x \text{ par } y\text{).}$$

3) Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. L'addition, la multiplication et la composition de deux applications sont des LCI sur E.

1.2 Propriétés des LCI

Soit E un ensemble non vide et $*$ une LCI sur E.

– La loi $*$ est dite *associative* si et seulement si :

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

pour tout (x, y, z) dans E^3.

– La loi $*$ est dite *commutative* si et seulement si :

$$x * y = y * x$$

pour tout (x, y) dans E^2.

– La loi $*$ admet un *élément neutre* e si et seulement si :

$$x * e = e * x = x$$

pour tout x dans E.

Exemples :

1) Dans $\mathbb{R}$ l'addition et la multiplication sont commutatives et associatives :

$$x+y=y+x, \quad x+(y+z)=(x+y)+z$$
$$xy=yx, \quad x(yz)=(xy)z$$

pour tous $x,y,z\in\mathbb{R}$. L'addition admet 0 comme élément neutre alors que la multiplication admet 1 comme élément neutre.

2) Dans $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ l'addition et la multiplication sont des LCI associatives et commutatives. La composition des applications est une LCI associative mais non commutative. L'application identité $\mathrm{Id}: x\mapsto x$ est l'élément neutre pour la loi de composition des applications ; en effet

$$\forall f\in\mathcal{A}(\mathbb{R}), \forall x\in\mathbb{R}, \ (f\circ \mathrm{Id})(x)=(\mathrm{Id}\circ f)(x)=f(x).$$

1.3 Loi de composition externe

Définition : Soit E un ensemble non vide. On appelle *loi de composition externe* sur E à opérateurs dans $\mathbb{K}$ toute application de $\mathbb{K}\times E$ dans E.

C'est donc une application qui à chaque couple $(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times E$ associe un unique élément de E que l'on note $\lambda.x$ ou λx.

Exemples :

1) Dans $\mathbb{R}^n$ le produit d'un vecteur $x=(x_1,\cdots,x_n)$ par un réel λ

$$\lambda x=(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n)$$

est une loi de composition externe sur $\mathbb{R}^n$.

2) Dans $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ la multiplication d'une application f par un réel λ

$$\lambda f: x\mapsto \lambda f(x)$$

est une loi de composition externe sur $\mathcal{A}(\mathbb{R})$.

1.4 Espaces vectoriels

Définition générale : Soit E un ensemble non vide sur lequel sont définies une LCI

$$+\ : E\times E\to E \quad (x,y)\mapsto x+y \qquad \text{(addition)}$$

et une loi de composition externe à opérateurs dans $\mathbb{K}$

$$\cdot : \mathbb{K}\times E\to E \quad (\lambda,x)\mapsto \lambda.x \qquad \text{(multiplication par un scalaire)}.$$

On dit que E est un *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ (ou brièvement un $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel*) si les deux lois de composition satisfont aux propriétés suivantes :

(A_1) L'addition $+$ est commutative, associative et admet un élément neutre, noté 0_E.

(A_2) Tout élément x de E admet un unique symétrique, noté $-x$, vérifiant

$$x+(-x)=(-x)+x=0_E.$$

(A_3) Pour tous $x,y\in E$, et tout $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$.

(A_4) Pour tout $x\in E$, et tout $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

(A_5) Pour tout $x\in E$, et tout $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$.

(A_6) Pour tout $x\in E$, $1x=x$.

On convient d'appeler les éléments d'un espace vectoriel par *vecteurs*.

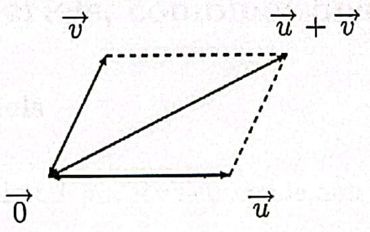
Exemples :

1) $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel pour les lois suivantes :

$$x + y = (x_1 + y_2, \cdots, x_n + y_n) \qquad (*)$$
$$\lambda x = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

avec $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dans le cas $n = 2$, on retrouve le plan réel $V_2 = \mathbb{R}^2$:



(Règle du parallélogramme)

2) De façon analogue, $\mathbb{C}^n$ est aussi un $\mathbb{C}-$ espace vectoriel muni des lois de composition $(*)$.

3) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$. Étant donné deux polynômes

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \quad \text{et} \quad Q(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_n X^n$$

dans $\mathbb{R}_n[X]$, on définit la somme de P et Q par

$$(P + Q)(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n. \qquad (S)$$

Le produit par un scalaire λ est défini par

$$(\lambda P)(X) = \lambda a_0 + \lambda a_1 X + \cdots + \lambda a_n X^n. \qquad (P)$$

Muni des lois de composition (S) et (P), $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

4) $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ muni des lois de composition "somme de fonctions" et "produit d'une fonction par un scalaire" est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

1.5 Règles de calcul dans les espaces vectoriels

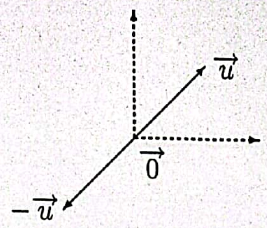
Les axiomes $(A_1) - (A_6)$ de définition d'un espace vectoriel entraînent les propriétés de calcul suivantes :

(P_1) Pour tous $x, y, z \in E$, $\quad (x + z = y + z \Leftrightarrow x = y)$.
(P_2) Pour tout $x \in E$, $\quad 0.x = 0_E$.
(P_3) Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.0_E = 0_E$.
(P_4) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$, $\quad (\lambda x = 0_E) \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$.
(P_5) Pour tout $x \in E$, $(-1)x = -x$.

Exercice. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$. Montrer que

1) $(-\lambda)\, x = -(\lambda x) = \lambda(-x)$.
2) $(\lambda x = \lambda y) \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = y)$.

Exemple : Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), l'élément neutre pour l'addition est $0_E = (0, \cdots, 0)$. Le symétrique d'un vecteur $x = (x_1, \cdots, x_n)$ est le vecteur $-x = (-x_1, \cdots, -x_n)$.



2 Sous-espaces vectoriels, combinaisons linéaires

2.1 Sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E.

Définition. On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E (brièvement $\mathbb{K}-$ s.e.v.) si F est un $K-$ espace vectoriel pour les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire induites par E.

Autrement dit, F vérifie les axiomes $(A_1)-(A_6)$ pour les lois de composition $+$ et $\cdot$ héritées de E. En pratique il est commode d'utiliser le critère simple suivant pour déterminer les sous-espace vectoriels :

Premier critère : Un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

(i) $F \neq \emptyset$.

(ii) $\forall (x,y) \in F \times F,\ x+y \in F$. (stabilité pour l'addition)

(iii) $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x \in F$. (stabilité pour la multiplication)

En effet les conditions (i), (ii) et (iii) permettent de conclure que $0_E \in F$ (élément neutre pour l'addition). Les autres propriétés (commutativité, associativité de l'addition, axiomes $(A_3)-(A_6)$) restent inchangées comme elles le sont pour E.

Le critère précédent peut encore être simplifié sous la forme suivante :

Deuxième critère : Un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

(i) $F \neq \emptyset$.

(iib) $\forall (x,y) \in F \times F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x+\lambda y \in F$.

En effet, on vérifie facilement que les conditions (i) et (ii) du premier critère sont équivalentes à la condition (iib) du deuxième critère.

Exemples :

1) $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}-$ s.e.v. de $\mathbb{C}$. Plus généralement, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}-$ s.e.v. de $\mathbb{C}^n$.

2) $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{R}-$ s.e.v. de $\mathbb{R}$ bien qu'il soit stable pour l'addition. En effet, pour $\lambda = \sqrt{2}$ et $x=1$, on a $\lambda x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc la condition (iii) n'est pas vérifiée.

3) Le plan $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2.1 : Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et soit $\{F_i : i \in I\}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E. Alors l'intersection $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. En effet, soit $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ l'intersection de cette famille (I étant l'ensemble d'indices). On a $0_E \in F$ puisque $0_E \in F_i$ pour tout $i \in I$. Soient x et y dans F et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $x, y \in F_i$ pour chaque $i \in I$. Il en résulte que $x + \lambda y \in F_i$ (car F_i est un $\mathbb{K}-$ s.e.v. de E) pour tout $i \in I$. Par définition de l'intersection ceci implique que $x + \lambda y \in F$. ■

Remarque. La réunion de deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel n'est pas en général un sous-espace vectoriel. Exemple : dans $\mathbb{R}^2$ la réunion de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice. Soit E un $\mathbb{K}-$ e.v. et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que la réunion $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

2.2 Combinaison linéaire

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

Définition. Soit $\{x_1, \cdots, x_n\}$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs x_i tout vecteur x de E de la forme $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ où les λ_i appartiennent à $\mathbb{K}$.

Remarque. Une même combinaison linéaire x des vecteurs $x_1, \cdots, x_n$ peut s'écrire sous plusieurs formes avec différents coefficients λ_i.

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$, $x_1 = (-1, 1)$, $x_2 = (2, 1)$, $x_3 = (1, 0)$ et $x = (2, 2)$. On peut vérifier que $x = x_1 + x_2 + x_3 = 2x_2 - 2x_3 = 2x_1 + 4x_3$.

Posons $G = \{x_1, \cdots, x_n\}$ et considérons l'ensemble

$$\operatorname{vect}(G) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, \cdots, x_n$.

Notons que $\operatorname{vect}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E. En effet, clairement $0_E \in \operatorname{vect}(G)$ car $0_E = 0.x_1 + \cdots + 0.x_n$. En outre, soient $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ dans $\operatorname{vect}(G)$

(avec $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \cdots, n$). Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$x + \lambda y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \lambda \beta_i) x_i.$$

Par conséquent, $x + \lambda y \in \operatorname{vect}(G)$.

Proposition 2.2. Soit $G = \{x_1, \cdots, x_n\}$. L'ensemble vect (G) est le plus petit sous-espace vectoriel (au sens de l'inclusion) de E contenant G.

Commentaire. L'énoncé de la proposition signifie que tout sous-espace vectoriel F de E qui contient G contient aussi vect (G).

Démonstration. En effet, tout sous-espace vectoriel F de E qui contient G contient aussi (par stabilité pour l'addition et la multiplication par un scalaire) toutes les combinaisons linéaires d'éléments de G. ■

Exemples :

1) Dans $\mathbb{R}^3$, soient $x_1 = (1,1,0)$ et $x_2 = (0,0,1)$

$$\operatorname{vect}(x_1, x_2) = \left\{(\alpha, \alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\right\}$$

on retrouve ainsi le plan illustré dans le paragraphe précédent.

2) Dans $\mathbb{R}_3[X]$,

$$\operatorname{vect}(1, X, X^2) = \left\{\alpha + \beta X + \gamma X^2 : (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathbb{R}_2[X].$$

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $G = \{x_1, \cdots, x_n\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille G est *génératrice* de F si $F = \operatorname{vect}(G)$.

Remarque. Ceci est aussi valide dans le cas particulier où $F = E$. Dans ce cas, G est génératrice de E si et seulement si tout élément de E est combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \cdots, x_n$. Dans tout ce cours, nous ne nous intéresserons qu'aux espaces vectoriels engendrés par des familles finies :

Définition. Un espace vectoriel E est dit de *dimension finie* si E admet une partie finie G génératrice de E.

Exemples.

1) Soit $E = \mathbb{R}^n$. Considérons la famille de vecteurs $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ où

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 1), \ \ldots, e_i = (0, 0, \cdots, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}}\text{place}}, 0, \cdots, 0), \ \ldots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)$$

appelés *vecteurs unités* de $\mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, \cdots, x_n)$ est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$ alors clairement

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Par conséquent, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ est une partie génératrice de $\mathbb{R}^n$.

2) Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, la famille de vecteurs $\{1, X, \cdots, X^n\}$ est génératrice de E.

3 Famille libre, liée, base, dimension

3.1 Famille libre, liée

Soit E un $\mathbb{K}-$ ev et $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$ une famille de vecteurs de E.

Définition. On dit que la famille de vecteurs $\{x_1, \cdots, x_n\}$ est *libre* (ou que les vecteurs

$x_1, \cdots, x_n$ sont *linéairement indépendants*) si pour tout $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, la condition $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_E$ implique que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Exemple. Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Alors le système $\{e_1, e_2\}$ est libre dans E. En effet, soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0_E$. Or $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = (\alpha_1, \alpha_2)$. Donc $(\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$ et par suite $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Définition. Une famille de vecteurs $\{x_1, \cdots, x_n\}$ qui n'est pas libre est dite *liée* (on dit dans ce cas que les vecteurs $x_1, \cdots, x_n$ sont *linéairement dépendants*).

Ainsi la famille $\{x_1, \cdots, x_n\}$ est liée si et seulement si il existe une suite de scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ **non tous nuls** (ce qui revient à écrire $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$) tels que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_E$.

La notion d'indépendance est étroitement liée à l'unicité de représentation dans les combinaisons linéaires. Ainsi on a la

Proposition 3.1. Une famille de vecteurs $\{x_1, \cdots, x_n\}$ est libre si et seulement si pour tout couple de $n-$ uplets $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ dans $\mathbb{K}^n$, la condition

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \qquad (*)$$

implique que $\alpha_i = \beta_i$ pour $i = 1, \cdots, n$.

Preuve. $\Rightarrow$) Supposons $\{x_1, \cdots, x_n\}$ libre. Soient $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ tels que l'égalité $(*)$ soit vérifiée. Alors

$$0_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) x_i.$$

On en déduit alors que $\alpha_1 - \beta_1 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0$.

$\Leftarrow$) Inversement, supposons la propriété d'unicité de représentation vérifiée et montrons que $\{x_1, \cdots, x_n\}$ est libre. En effet, soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0_E$. On a donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} 0.x_i$. Par unicité de représentation, on en déduit que $\alpha_i = 0$ pour $i = 1, \cdots, n$. ■

Citons quelques propriétés rapides des familles libres et liées qui découlent directement de la définition :

1) **Toute famille contenue dans une famille libre est libre.**
2) **Si une famille de vecteurs contient une sous-famille liée, la famille est elle même liée.**
3) **Une famille réduite à un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.**
4) **Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.**

En effet, les propriétés $1) - 3)$ sont évidentes. Prouvons 4). Soit $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$ une famille de vecteurs de E. Supposons que S est liée. Alors il existe une suite de scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0_E$. Il existe au moins un indice $k \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $\alpha_k \neq 0$. On a alors

$$\alpha_k x_k = -\sum_{i \neq k} \alpha_i x_i \quad \text{et par suite} \quad x_k = \sum_{i \neq k} \beta_i x_i$$

en posant $\beta_i = -\alpha_i / \alpha_k$ pour $i \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{k\}$.

Inversement, supposons que l'un au moins des vecteurs de S est combinaison linéaire des autres. Quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que x_1 est combinaison linéaire des vecteurs $x_2, \cdots, x_n$. Il existe donc des scalaires $\gamma_2, \cdots, \gamma_n$ tels que $x_1 = \sum_{i=2}^{n} \gamma_i x_i$.

Ainsi $-x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_n x_n = 0$. La famille S est donc liée (l'un au mois des coefficients $-1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ est non nul).

Remarque. Deux vecteurs u et v sont dit *colinéaires* s'il existe $\lambda \in K$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$. Il résulte de la propriété 4) qu'une famille de deux vecteurs $\{u, v\}$ est liée si et ssi les deux vecteurs u et v sont colinéaires.

Exemples.

1) Dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) la famille des vecteurs unité $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est libre ; en effet, l'égalité $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0_E$ équivaut dans ce cas à $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (0, \cdots, 0)$.

2) Dans $\mathbb{R}_n[X]$, la famille de vecteurs $\{1, X, \cdots, X^n\}$ est libre (un polynôme est nul si et ssi tous ses coefficients sont nuls).

3) Soient $u = (1, 1)$, $v = (2, 1)$ et $w = (0, 1)$. Le système $\{u, v, w\}$ est lié dans $\mathbb{R}^2$. En effet, soient α, β, γ dans $\mathbb{R}$. L'égalité $\alpha u + \beta v + \gamma w = \mathbf{0}$ équivaut au système

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \gamma = \beta. \end{cases}$$

En prenant $\beta = 1$, on trouve ainsi que $-2u + v + w = \mathbf{0}$.

Proposition 3.2. Soit $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$ une famille libre d'un $\mathbb{K}-$ ev E et x un vecteur de E tel que $x \notin \text{vect}(S)$. Alors la famille $S \cup \{x\}$ est libre dans E.

Démonstration. En effet, soient $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que $\alpha x + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$. Nécessairement, on a $\alpha = 0$ (car sinon, on aurait $x = -(\alpha_1/\alpha)x_1 - \cdots - (\alpha_n/\alpha)x_n \in \text{vect}(S)$ absurde). Donc $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ et par suite $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. ■

3.2 Bases et dimension d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

Définition. Une famille de vecteurs $\{x_1, \cdots, x_n\}$ de E est dite une *base* de E si elle est libre et génératrice de E.

Exemples.

1) Dans $E = \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) la famille des vecteurs unités $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base. On l'appelle *base canonique* de E.

2) Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, la famille de polynômes $\{1, X, \cdots, X^n\}$ est une base.

On a la caractérisation importante suivante des bases d'un espace vectoriel :

Proposition 3.3. Une famille de vecteurs $\{x_1, \cdots, x_n\}$ est une base de E si et seulement si pour tout vecteur x de E **il existe un unique** $n-$ uplet $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i. \qquad (*)$$

Commentaire. L'écriture $(*)$ s'appelle *représentation du vecteur* x dans la base $\{x_1, \cdots, x_n\}$. Les coefficients $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ (uniquement déterminés) s'appellent les *coordonnées* du vecteur x dans la base $\{x_1, \cdots, x_n\}$.

Démonstration. c'est une conséquence immédiate de la Proposition 3.1 et du fait que $\{x_1, \cdots, x_n\}$ est génératrice de E. ■

Nous aurons besoin dans ce qui suit du lemme suivant :

Lemme de Steinitz. Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F admet une famille génératrice G de n éléments. Alors toute famille S de F ayant $n + 1$ éléments est liée.

Démonstration. Nous allons montrer l'énoncé du lemme par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, F est un sev engendré par une famille constituée d'un seul vecteur $\{x_0\}$. Soient x et y deux vecteurs de F. Alors $x = \alpha x_0$ et $y = \beta x_0$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Il est clair que les deux vecteurs x et y sont colinéaires. Par conséquent, la famille $\{x, y\}$ est liée.

Supposons la propriété du lemme vraie à l'ordre n et montrons qu'elle est aussi vraie à l'ordre $n+1$. Supposons que le sev F de E est engendré par une famille $G = \{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ de $n+1$ vecteurs. Soit $S = \{y_1, \cdots, y_{n+2}\}$ un système de $n+2$ vecteurs de F. Chaque vecteur y_k s'écrit sous la forme :

$$y_k = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^k x_i$$

avec α_i^k $(1 \leq i \leq n+1$ et $1 \leq k \leq n+2)$ des coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si $\forall k \in \{1, \cdots, n+2\}$, $\alpha_{n+1}^k = 0$, alors $y_1, \cdots, y_{n+2}$ appartiennent au sous-espace vectoriel $F_0 := \text{vect}\,(x_1, \cdots, x_n)$. Par hypothèse de récurrence, la famille $\{y_1, \cdots, y_{n+1}\}$ est liée. Il en est donc de même de $\{y_1, \cdots, y_{n+2}\}$.

Supposons maintenant que l'un au moins des coefficients α_{n+1}^k $(1 \leq k \leq n+2)$ est non nul. Quitte à renuméroter les vecteurs $y_1, \cdots, y_{n+2}$, on supposera que $\alpha_{n+1}^{n+2} \neq 0$. Posons

$$\lambda_k := \alpha_{n+1}^k / \alpha_{n+1}^{n+2} \quad \text{et} \quad z_k := y_k - \lambda_k y_{n+2} \quad \text{pour } k = 1, \cdots, n+1.$$

Alors $z_k = \sum_{i=1}^n (\alpha_i^k - \lambda_i \alpha_i^{n+2}) x_i \in \text{vect}\,(x_1, \cdots, x_n) = F_0$ pour $k = 1, \cdots, n+1$. Par hypothèse de récurrence, on déduit que la famille $\{z_1, \cdots, z_{n+1}\}$ est liée. Il existe donc $\beta_1, \cdots, \beta_{n+1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i z_i = 0_E$. Or

$$\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i z_i = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \lambda_i \right) y_{n+2}.$$

Par suite, la famille $\{y_1, \cdots, y_{n+2}\}$ est liée. Ceci complète la preuve du théorème. ■

Une conséquence immédiate du lemme de Steinitz est la propriété fondamentale suivante des bases dans un espace vectoriel :

Proposition 3.4. Si un $K-$ espace vectoriel E admet une base constituée de n vecteurs $(n \geq 1)$, alors toutes les bases de E sont constituées de n vecteurs.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ une base de n vecteurs de E. Considérons $\mathcal{C} = \{y_1, \cdots, y_m\}$ une autre base de E constituée de m vecteurs (avec $m \geq 1$). Si on avait $m \geq n+1$ alors d'après le lemme de Steinitz la famille $\mathcal{C}$ serait liée (car contenant au moins une sous-famille liée de $n+1$ vecteurs). Donc nécessairement $m \leq n$. En inversant le rôle de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on voit aussi pour la même raison que $n \leq m$. En conclusion, on obtient que $m = n$. ■

Introduisons maintenant la notion de rang d'un système de vecteurs :

Définition. Soit S un système fini de vecteurs de E **non tous nuls**. On appelle *rang* de S (que l'on note $\text{rg}\,(S)$) le nombre cardinal maximal des sous familles libres de S.

Autrement dit, le rang de S est le nombre **maximal** d'éléments parmi toutes les sous-familles libres de S. Comme S contient au moins un vecteur non nul, on a $1 \leq \text{rg}\,(S) \leq \text{card}\,(S)$, où $\text{card}\,(S)$ est le cardinal de S (nombre d'éléments de S). En particulier :

Propriété. Si S est un système libre, on a $\text{rg}\,(S) = \text{card}\,(S)$.

Si $S = \{0_E\}$, on convient de poser $\text{rg}\,(S) := 0$.

Exemples :

1) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $S_1 = \{u, v, w\}$ où $u = (-1, 1)$, $v = (1, 2)$ et $w = (0, 3)$. On remarque que les seules sous-familles libres de S sont : $\{u\}$, $\{v\}$, $\{w\}$, $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ et $\{v, w\}$. Par conséquent, le rang de S_1 est 2.

2) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $S_2 = \{0, X, 1+X, X^2\}$. Les seules sous-familles libres de S sont : $\{X\}$, $\{1+X\}$, $\{X^2\}$, $\{X, 1+X\}$, $\{X, X^2\}$, $\{1+X, X^2\}$ et $\{X, 1+X, X^2\}$. Par conséquent, le rang de S_2 est 3.

Définition. Soit S un système fini de vecteurs de E non tous nuls. On appelle *sous-famille de base* de S toute sous-famille libre T de S dont le cardinal est égal au rang de S.

Exemples. Dans l'exemple 1) ci-dessus, $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ et $\{v, w\}$ sont toutes des sous-familles de base de S_1. Dans l'exemple 2), $\{X, 1+X, X^2\}$ est la seule sous-famille de base de S_2.

Théorème 3.1. Soit S un système fini de vecteurs de E non tous nuls et T une sous-famille de base de S. On a l'égalité : $\mathrm{vect}\,(S) = \mathrm{vect}\,(T)$.

Démonstration. Comme $T \subset S$, on a l'inclusion $\mathrm{vect}\,(T) \subset \mathrm{vect}\,(S)$. Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de prouver que $S \subset \mathrm{vect}\,(T)$. Supposons par l'absurde que $S \not\subset \mathrm{vect}\,(T)$. Alors il existe un vecteur $u \in S$ tel que $u \notin \mathrm{vect}\,(T)$. Vu que T est libre, ceci entraîne (voir Proposition 3.2) que le système $T' := T \cup \{u\}$ est aussi libre. Ainsi T' est une sous-famille libre de S de cardinal $\mathrm{card}\,(T') = \mathrm{card}\,(T) + 1 = \mathrm{rg}(S) + 1$. Ce qui contredit la définition du rang de S. ■

Une conséquence de la Proposition 3.4 et du Théorème 3.1 est le résultat suivant :

Théorème 3.2. Tout $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base et toutes ses bases ont le même nombre d'éléments.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel non nul de dimension finie. On appelle *dimension* de E, et l'on note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$, le nombre d'éléments de l'une de ses bases.
S'il n' y a pas d'ambiguïtés sur l'ensemble $\mathbb{K}$, on notera la dimension de E tout simplement par $\dim(E)$.
Convention : L'espace vectoriel nul $\{0\}$ est de dimension 0.

Exemples.

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[X] = n+1.$$

Exercice. Montrer que $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel de dimension $2n$. (on considérera la famille $\{e_1, \cdots, e_n, ie_1, \cdots, ie_n\}$).

Remarque. Soit S un système fini de vecteurs de E non tous nuls. Alors $\mathrm{rg}\,(S) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{vect}\,(S)$. C'est une conséquence du théorème 3.4.

Théorème 3.3. Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$ une famille finie de n vecteurs de E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1) S est une famille libre.
2) S est une famille génératrice de E.
3) S est une base de E.

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2). Supposons par l'absurde que S n'est pas génératrice de E. Alors il existe $u \in E$ tel que $u \notin \mathrm{vect}\,(S)$. Il en résulte que le système $S' := S \cup \{u\}$ est libre (voir Proposition 3.2). Soit B une base quelconque de E. La famille $S'' := S' \cup B$ est génératrice de E et contient une sous-famille libre S' de cardinal $n+1$. Donc $\mathrm{rg}\,(S'') \geq n+1$. Or (voir remarque ci-dessus), $\mathrm{rg}\,(S'') = \dim \mathrm{vect}\,(S'') = \dim(E) = n$. Ce qui est absurde.

2) $\Rightarrow$ 3). Soit T une sous-famille de base de S. D'après le théorème 3.1, $\mathrm{vect}\,(T) = \mathrm{vect}\,(S) = E$. Il en résulte que T est une base de E. Par suite, $\mathrm{card}\,(T) = \dim(E) = n$. Ainsi $T \subset S$ et $\mathrm{card}\,(T) = \mathrm{card}\,(S)$. On en déduit que $T = S$ et par conséquent que la famille S est une base de E.

3) $\Rightarrow$ 1). Evidente.

Remarque. En général, si E est un ev de dimension n et S est une partie finie quelconque de E de cardinal $p \geq 1$, on a

(a) (S libre) $\Longrightarrow$ ($p \leq n$)

(b) (S génératrice de E) $\Longrightarrow$ ($p \geq n$).

En effet, (a) résulte du lemme de Steinitz et (b) résulte du fait que toute famille génératrice de E contient une base de E (voir la démonstration de l'implication 2) $\Rightarrow$ 3) ci-dessus).

Théorème 3.4 (base incomplète)

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $\{x_1, \cdots, x_p\}$ une famille libre de p vecteurs de E avec $1 \leq p < n$. On peut trouver $n-p$ vecteurs de E, $x_{p+1}, \cdots, x_n$, tels que la famille $\{x_1, \cdots, x_p, x_{p+1}, \cdots, x_n\}$ forme une base de E.

Démonstration. Notons $S = \{x_1, \cdots, x_p\}$ et considérons l'ensemble $\mathcal{L}$ de toutes les parties libres de E contenant S. On a $\mathcal{L} \neq \emptyset$ (car au moins $S \in \mathcal{L}$) et $\mathrm{card}\,(T) \leq n$ pour tout $T \in \mathcal{L}$ (voir remarque (a) ci-dessus). Il existe donc une partie $T_0 \in \mathcal{L}$ de cardinal m maximal :

$$m := \max\{\mathrm{card}\,(T) : T \in \mathcal{L}\}. \tag{*}$$

Montrons que $\mathrm{vect}\,(T_0) = E$. Supposons par l'absurde le contraire. Alors il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \mathrm{vect}\,(T_0)$. D'après la proposition 3.2 la famille $T_1 := T_0 \cup \{x_0\}$ est libre ; de plus elle contient S. Donc $T_1 \in \mathcal{L}$ et $\mathrm{card}\,(T_1) = m+1$. Ceci contredit la maximalité $(*)$ de m. En conclusion T_0 est une famille libre et génératrice, donc une base, de E contenant S. ■

4 Dimension de sous-espaces vectoriels

Proposition 3.5. Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E de dimension finie. Alors $\dim(F) \leq \dim(E)$.
L'égalité $\dim(F) = \dim(E)$ a lieu si et seulement si $F = E$.

Démonstration. Posons $n := \dim(E)$ et $p := \dim(F)$. Si $F = \{0\}$, on a $p = 0 \leq n$. Si $F \neq \{0\}$, il existe une base $S = \{u_1, \cdots, u_p\}$ de p vecteurs de F. Comme S est une famille libre de E, on a $p \leq n$ (voir remarque (a) précédant le théorème de la base incomplète). Supposons maintenant que $p = n$. Alors d'après le théorème 3.3, S est une base de E. Donc $F = \mathrm{vect}\,(S) = E$. ■

Définition. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E. On appelle *somme* de F et de G le sous-ensemble $F+G$ de E défini par

$$F + G = \{x + y : (x, y) \in F \times G\}.$$

Exemple. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\}$. On a
$F + G = \{(x,0) + (0,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$.

Proposition 3.6. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E. L'ensemble $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. On a $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$. Soient $u = x + y$ et $v = x' + y'$ dans $F + G$ (avec $(x, x') \in F^2$ et $(y, y') \in G^2$) et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $u + \lambda v = (x + \lambda x') + (y + \lambda y')$. Or $x + \lambda x' \in F$ et $y + \lambda y' \in G$ car F et G sont deux sev de E. Donc $u + \lambda v \in F + G$.

Théorème 3.5. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E de dimension finie. Alors $F + G$ est un espace vectoriel de dimension finie et

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G). \tag{*}$$

Démonstration.(théorème admis). ■

Définition. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E. On dit que la somme $F+G$ de F et de G est **directe** si $F \cap G = \{0_E\}$. On écrit dans ce cas $F \oplus G$ au lieu de $F + G$.

Exemple. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \{\alpha X : \alpha \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{\alpha X^2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$. La somme

$F+G=\{\alpha X+\beta X^2 : (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}$ est directe car $F\cap G=\{0\}$.

Proposition 3.7. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E de dimension finie. La somme $F+G$ de F et de G est directe si et seulement si

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G). \qquad (**)$$

Démonstration. $\Rightarrow$) Supposons que la somme $F+G$ est directe. Il est clair que l'égalité $(**)$ est vérifiée si $F=\{0_E\}$ ou $G=\{0_E\}$. On supposera donc que $F\neq\{0_E\}$ et $G\neq\{0_E\}$ Soient alors $S=\{f_1,\cdots,f_p\}$ une base de F et $T=\{g_1,\cdots,g_q\}$ une base de G (où $p=\dim(F)$ et $q=\dim(G)$). L'égalité $(**)$ sera prouvée si on montre que $S\cup T=\{f_1,\cdots,f_p,g_1,\cdots,g_q\}$ est une base de $F+G$. Vu la construction de $F+G$, il est clair que $S\cup T$ est une famille génératrice de $F+G$. Prouvons qu'elle est libre. En effet, soient $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ et $\beta_1,\cdots,\beta_q$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^p\alpha_if_i+\sum_{i=1}^q\beta_ig_i=0_E$. Alors le vecteur $\sum_{i=1}^p\alpha_if_i=-\sum_{i=1}^q\beta_ig_i$ appartient en même temps à F et à G. Comme $F\cap G=\{0_E\}$, on en déduit que $\sum_{i=1}^p\alpha_if_i=-\sum_{i=1}^q\beta_ig_i=0_E$. Vu que S et T sont libres, on en déduit ensuite que $\alpha_i=\beta_j=0$ pour tous $1\leq i\leq p$ et $1\leq j\leq q$. En conclusion, $S\cup T$ est une base de $F+G$.

$\Leftarrow$) On suppose que l'égalité $(**)$ est vérifiée. En vertu de $(*)$, on a

$$\dim(F\cap G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F+G)=0.$$

Donc $F\cap G=\{0_E\}$. ■

Définition. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E. On dit les sev E et F sont *supplémentaires* si $E=F\oplus G$.

Proposition 3.8. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
(b) $\forall x\in E,\ \exists!\,(u,v)\in F\times G$ tel que $x=u+v$.
(c) $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$ et $F\cap G=\{0_E\}$.

Démonstration. $(a)\Rightarrow(b)$. Soit $x\in E$. Il existe $(u,v)\in F\times G$ tel que $x=u+v$. Montrons que (u,v) est uniquement déterminé. Soit (u',v') un autre couple dans $F\times G$ tel que $x=u'+v'$. On a donc $u+v=u'+v'$, soit $u-u'=v'-v$. Or $u-u'=v'-v\in F\cap G$. Donc $u-u'=v'-v=0_E$.

$(b)\Rightarrow(c)$. Il est clair que $F+G=E$. Soit $x\in F\cap G$. On a

$$x=\underbrace{x}_{\in F}+\underbrace{0_E}_{\in G}=\underbrace{0_E}_{\in F}+\underbrace{x}_{\in G}.$$

Par unicité de représentation dans (b), on en déduit que $x=0_E$. Ainsi $F\cap G=\{0_E\}$.

D'après le théorème 3.5, on a

$$\dim(E)=\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)=\dim(F)+\dim(G).$$

$(c)\Rightarrow(a)$. $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E et

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)=\dim(F)+\dim(G).$$

Donc $\dim(F+G)=\dim(E)$; d'où $F+G=E$ (par la proposition 3.5). ■

Méthode pratique pour construire les supplémentaires :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p.

- Si $p=0$, on a $F=\{0_E\}$ et E est le seul sous-espace supplémentaire de F.
- Si $p=n$, on a $F=E$ et $\{0_E\}$ est le seul sous-espace supplémentaire de F.