Chapitre 2

Applications linéaires

1 Définitions générales

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que f est *linéaire* si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $L(E,F)$.

Exemple. Soient $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$ et f définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x-y, x+y, 2x).$$

Alors f est linéaire.

<u>Critère</u> :

Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si :

(a) $\forall (x,y) \in E \times E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$ (f est additive)

(b) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$ (f est homogène)

Exemples.

(1) $E = \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$, l'application $e_i^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$e_i^*(x_1, \cdots, x_n) = x_i$$

est linéaire.

(2) $E = F = \mathbb{R}[X]$ $\mathbb{R}-$espace vectoriel de tous les polynômes à coefficients réels. Pour $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme dérivé de $P(X)$ est défini par

$$P'(X) = a_1 + a_2 X + \cdots + a_n X^{n-1}.$$

L'application "dérivation des polynômes"

$$\delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \quad P(X) \mapsto P'(X)$$

est linéaire.

(3) $E = F = \mathbb{C}$, l'application

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \bar{z}$$

est linéaire, $\mathbb{C}$ étant considéré comme $\mathbb{R}-$ e.v. de dimension 2.

2. Propriétés, règles de calcul

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On a les propriétés suivantes :

P1) $f(0_E) = 0_F$.

P2) $\forall x \in E, \quad f(-x) = -f(x)$.

P3) $\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x-y) = f(x) - f(y)$.

P4) $\forall (x_1, \cdots, x_p) \in E^p$, $\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$.

Preuve. P1) on a $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$, d'où $f(0_E) = 0_F$.

P2) On a $0_F = f(0_E) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$. D'où le résultat.

P3) c'est une conséquence de P2) et de l'additivité de f.

P4) se démontre par récurrence. ■

Définitions. Soient E et F deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels.

1) On appelle *endomorphisme* de E toute application linéaire de E vers E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $L(E)$

2) On appelle *isomorphisme* de E vers F toute application linéaire bijective de E vers F. L'ensemble des isomorphismes de E vers F est noté $\mathrm{Isom}(E, F)$.

3) On appelle *automorphisme* de E tout endomorphisme de E qui est bijectif. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{Aut}(E)$.

Remarque. Par définition, on a $\mathrm{Aut}(E) = \mathrm{Isom}(E, E)$.

Exemples.

1) L'application nulle $\Theta : E \to E \; : \; x \mapsto 0_E$ est un endomorphisme de E.

2) L'application identique $\mathrm{Id}_E : E \to E \; : \; x \mapsto x$ est un automorphisme de E.

3) Pour $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, l'homothétie vectorielle $h_\alpha : E \to E \; : \; x \mapsto \alpha x$ est un automorphisme de E.

Propriété :

Soit f un isomorphisme de E dans F. L'application réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Opérations sur les applications linéaires :

Soient $f, g \in L(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) La somme de f et g est l'application linéaire, notée $f+g$, de E vers F définie par

$$\forall x \in E, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

2) Le produit de f par le scalaire λ est l'application linéaire, notée λf, de E vers F définie par

$$\forall x \in E, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Propriété :

$L(E, F)$ est un espace vectoriel pour les opérations somme et multiplication par un scalaire d'applications linéaires.

Preuve. En effet, il est facile de vérifier que la somme est associative, commutative et ayant Θ (application nulle) pour élément neutre. L'inverse d'une application $f \in L(E, F)$ pour l'opération somme est l'application $-f : x \mapsto -f(x)$. Les autres propriétés de produit par un scalaire résultent directement des propriétés correspondantes du $\mathbb{K}-$ espace vectoriel F.
■

Composition d'applications linéaires :

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}-$ espace vectoriels donnés. Soient $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$. La composée $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Citons quelques propriétés de la composition d'applications linéaires.

Propriétés :

Soient E, F, G, H quatre $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels donnés.

1) $\forall f, g \in L(E, F)$, $\forall h \in L(F, G)$,
$h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g \quad$ et $\quad (f+g) \circ h = f \circ g + g \circ h$.

2) $\forall f \in L(E, F)$, $\forall g \in L(F, G)$, $\forall h \in L(G, H)$, $\quad (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

3) $\forall f \in L(E, F)$, $\quad \mathrm{Id}_F \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E = f$.

4) $\forall f \in L(E, F)$, $\forall g \in L(F, G)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha (g \circ f) = (\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f)$.

3 Noyau, image, rang d'une application linéaire

Dans les espaces vectoriels de dimension finie, il existe un unique procédé pour construire les applications linéaires.

Proposition 3.1. Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel muni d'une base $(e_1, \cdots, e_n)$, et F un autre $\mathbb{K}-$ espace vectoriel. Pour toute suite finie $b_1, \cdots, b_n$ de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad f(e_i) = b_i.$$

Démonstration. *Existence.* Considérons l'application f de E dans F définie par

$$\forall (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k.$$

L'application f est linéaire. En effet, soient $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, $y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k$ dans E et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} f(x + \lambda y) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \lambda \beta_k) e_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \lambda \beta_k) b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k + \lambda \sum_{k=1}^{n} \beta_k b_k \\ &= f(x) + \lambda f(y). \end{aligned}$$

De plus, $f(e_i) = b_i$ pour $i = 1, \cdots, n$.

Unicité. Soit g une autre application linéaire de E dans F telle que $g(e_i) = b_i$ pour $i = 1, \cdots, n$. Prenons $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in E$ quelconque. Par linéarité de g, on a

$$g(x) = g\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k = f(x).$$

D'où le résultat. ■

Conséquences :

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel admettant $(e_1, \cdots, e_n)$ pour base et soit F un autre $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

1) Toute application linéaire $f : E \to F$ est **entièrement déterminée** par les vecteurs $f(e_1), \cdots, f(e_n)$.

2) Deux applications linéaires f et g de E dans F sont **égales** si et seulement si $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $f(e_i) = g(e_i)$.

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$. On appelle *noyau* de f, et on note $\operatorname{Ker}(f)$, l'ensemble de tous les vecteurs $x \in E$ tels que $f(x) = 0_F$.

Donc
$$\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}.$$

Exemples.

1) $E = F = \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, x + z, y - z)$. On a

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\ y = z = -x\ ).$$

Donc $\operatorname{Ker}(f) = \{(x, -x, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{vect}(u)$ avec $u = (1, -1, -1)$.

2) $E = F = \mathbb{R}[X]$ et $\delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application linéaire dérivation. On a

$$\operatorname{Ker}(\delta) = \{P \in \mathbb{R}[X] : P'(X) = 0\} = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg P \leq 0\}$$

$\operatorname{Ker}(\delta)$ est donc l'ensemble de tous les polynômes réels constants.

Théorème 3.1. Soient E et F deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$. Alors

1) $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

2) f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration. 1) On a $0_E \in \operatorname{Ker}(f)$ car $f(0_E) = 0_F$. Soient $x, y \in \operatorname{Ker}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a
$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = 0_F + \lambda.0_F = 0_F.$$

Donc $x + \lambda y \in \operatorname{Ker}(f)$. Par conséquent, $\operatorname{Ker}(f)$ est un sev de E.

2) $\Rightarrow$) Supposons que f est injective. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. On a $f(x) = f(0_E) = 0_F$. Comme f est injective, on en déduit que $x = 0_E$. Ainsi $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.

$\Leftarrow$) Inversement, supposons que $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soient x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$. On a $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0_F$. Par conséquent, $x - y = 0_E$. D'où le résultat. ■

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$. On appelle *image* de f, et l'on note $\operatorname{Im}(f)$, l'ensemble de toutes les valeurs $f(x)$ de f lorsque x parcourt E.

Autrement dit,
$$\operatorname{Im}(f) = f(E) = \{f(x) : x \in E\}.$$

Exemples.

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$. On a $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

En effet, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (\lambda, \mu) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \lambda \\ x - y = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\lambda + \mu}{2} \\ y = \dfrac{\lambda - \mu}{2}. \end{cases}$$

2) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f : P(X) \mapsto XP(X)$. On a

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{aX^2 + bX : (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(0) = 0\right\}.$$

Théorème 3.2. Soient E et F deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels et $f \in L(E,F)$. Alors

1) $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

2) f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration. 1) D'abord, $0_F = f(0_E) \in \mathrm{Im}(f)$. Soient $y = f(x)$ et $y' = f(x')$ dans $\mathrm{Im}(f)$ avec $x, x' \in E$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $y + \lambda y' = f(x + \lambda x') \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F.

2) Évidente car on sait qu'une application f est surjective si et seulement si $f(E) = F$. ■

Remarque. Si E est un $\mathbb{K}-$ ev de dimension finie admettant $(e_1, \cdots, e_n)$ pour base, alors pour tout $f \in L(E,F)$,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left(f(e_1), \cdots, f(e_n)\right).$$

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in L(E,F)$. On appelle *rang* de f, et on note $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Théorème du rang. Soient E et F deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels de dimensions finies et soit $f \in L(E,F)$. On a l'égalité

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Démonstration. (théorème admis). ■

Remarque. On peut encore écrire le théorème du rang sous la forme équivalente

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Une conséquence importante du théorème du rang est la propriété suivante :

Proposition 3.2. Soient E et F deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels de dimensions finies avec $\dim(E) = \dim(F)$. Soit $f \in L(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective de E dans F.
(ii) f est surjective de E dans F.
(iii) f est injective de E dans F.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) triviale.
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Comme $\mathrm{Im}(f) = F$, on a $\dim(E) = \dim(F) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ et par suite $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Ce qui prouve que f est injective.
(iii) $\Rightarrow$ (i). On a $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ (théorème 3.1 (2)), donc d'après le théorème du rang $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Comme $\dim(E) = \dim(F)$, on en déduit que $\mathrm{Im}(f) = F$. Ainsi f est injective et surjective, donc bijective. ■

Remarque. On dit que deux espaces vectoriels E et F sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme f de E dans F.

Théorème 3.3. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.