Chapitre 1
Suites numériques

1 Définitions

Définition. On appelle suite de nombres réels toute application u d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne souvent par $(u_n)_{n \in I}$ ou (u_n) la suite u.

Le terme u_n s'appelle terme général de la suite (u_n).

Une suite peut être donnée :

Soit explicitement :

$$u_n = f(n)$$

où f est une application d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

- $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ est définie pour $n \in \mathbb{N}$.

On a $u_0 = 1, \quad u_1 = \dfrac{1}{2}, \quad u_2 = \dfrac{1}{5}, ...$

- $v_n = \dfrac{1}{n}$ est définie pour $n \geq 1$.

On a $v_1 = 1, \quad v_2 = \dfrac{1}{2}, ...$

Soit par récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné.} \end{cases}$$

Cette relation de récurrence permet de calculer le terme de rang $n+1$ en fonction du terme précédent de rang n.

Exemple :

- $\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 2 \\ u_0 = 3. \end{cases}$

On a $u_1 = 5u_0 + 2 = 17, \quad u_2 = 5u_1 + 2 = 87, ...$

Remarque :

Les suites que l'on rencontre le plus fréquemment en mathématiques financières sont les suites arithmétiques et les suites géométriques. Nous en rappellerons ici les propriétés les plus importantes.

2 Suites arithmétiques

Définition. On appelle suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+1} = u_n + r \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

Proposition. *Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors*

$$u_n = u_0 + rn \qquad \textit{pour tout} \;\; n \in \mathbb{N}$$

Remarque :

$$u_n = u_1 + r(n-1)$$

$$u_n = u_p + r(n-p)$$

Proposition. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. La somme S_n des $n+1$ premiers termes de (u_n) est donnée par :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Ce résultat permet de trouver la somme S_n d'une suite arithmétique en utilisant le premier terme et le dernier terme.

Remarque : De façon générale

$$S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + ... + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$$

Exemple : On considère la suite donnée par

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 2$.

Calculons par exemple les termes u_5, u_{20} et u_{100} :
$u_5 = u_0 + r \times 5 = 2 + 3 \times 5 = 17.$
$u_{30} = u_0 + r \times 30 = 2 + 3 \times 30 = 92.$
$u_{100} = u_0 + r \times 100 = 2 + 3 \times 100 = 302.$
On peut calculer u_{100} autrement :
$u_{100} = u_5 + r(100 - 5) = 17 + 3(100 - 5) = 302.$

Calculons par exemple les sommes $u_0 + u_1 + ... + u_{30}$ et $u_5 + u_8 + ... + u_{100}$:
$u_0 + u_1 + ... + u_{30} = (30 + 1)\dfrac{u_0 + u_{30}}{2} = (30 + 1)\dfrac{2 + 92}{2} = 1\ 457.$
$u_5 + u_8 + ... + u_{100} = (100 - 5 + 1)\dfrac{u_5 + u_{100}}{2} = (100 - 5 + 1)\dfrac{17 + 302}{2} = 15\ 312.$

Exemple : La somme des n premiers entiers naturels :

$$1 + 2 + 3 + ... + n$$

est la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 1$. On a donc :

$$\boxed{1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2}}$$

3 Suites géométriques

Définition. On appelle suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+1} = qu_n \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

Proposition. *Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors*

$$u_n = u_0 q^n \qquad \textit{pour tout} \ \ n \in \mathbb{N}$$

Remarque :

$$u_n = u_1 q^{n-1}$$

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

Proposition. *Soit* (u_n) *une suite géométrique de raison* q. *La somme* S_n *des* $n+1$ *premiers termes de* (u_n) *est donnée par :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad \textit{si} \;\; q \neq 1$$

Remarque : De façon générale

$$S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \frac{q^{n-p+1}-1}{q-1} \quad \text{si} \;\; q \neq 1$$

Exemple : On considère la suite donnée par

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 2$. Calculons par exemple les termes u_2, u_4 :

$u_2 = u_0 q^2 = 2 \times 3^2 = 18.$
$u_4 = u_0 q^4 = 2 \times 3^4 = 162.$

Calculons par exemple les sommes $u_0 + u_1 + ... + u_4$ et $u_2 + u_3 + ... + u_{10}$:

$u_0 + u_1 + ... + u_4 = u_0 \dfrac{q^{4+1}-1}{q-1} = 2\dfrac{3^5-1}{2} = 3^5 - 1.$
$u_2 + u_3 + ... + u_{10} = u_2 \dfrac{q^{10-2+1}-1}{q-1} = 18\dfrac{3^9-1}{2} = 9(3^9 - 1).$

Exemple : Considérons la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q \neq 1$. On a donc :

$$\boxed{1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}}$$