Chapitre 2
Intérêts Simples et Escompte

0 Définitions

L'intérêt est le prix payé par l'emprunteur au prêteur pour utiliser un capital pendant un temps donné. C'est le loyer de la somme prêtée. Il s'agit d'une dépense pour l'emprunteur et d'un revenu pour le prêteur.

Exemple :
1. Vous empruntez de l'argent à la banque. Vous êtes l'emprunteur, la banque est le prêteur. Votre emprunt vous coûte.
2. Vous placez de l'argent sur un compte bancaire. Vous êtes le prêteur, la banque est l'emprunteur. Votre placement vous rapporte (et coûte à la banque).

Le taux d'intérêt par période (annuel, semestriel, trimestriel, mensuel, quotidien) est l'intérêt produit par un capital d'une unité monétaire placé pendant une période (an, semestre, trimestre, mois, jour). C'est le rapport entre l'intérêt et la somme prêtée ou empruntée.

L'intérêt est variable selon la loi de l'offre et de la demande, du montant du prêt, de la durée et du taux d'intérêt.
Le taux d'intérêt s'exprimera le plus souvent en % pour la durée considérée : % annuel, % mensuel, etc.

On distingue deux types d'intérêts :
Intérêts simples : généralement utilisé pour les placements à court terme (moins d'un an).
Intérêts composés : généralement utilisé pour les placements à long terme (plus d'un an).

1 Intérêts simples

Définition. Dans le cas de l'intérêt simple, le capital reste invariable pendant toute la durée du prêt. L'emprunteur doit verser, à la fin de chaque période, l'intérêt dû.

Un capital est placé à intérêts simples si c'est le capital de départ qui produit l'intérêt pendant toute la durée du placement

Fomalisation :
Dans le système des intérêts simples :
– Les intérêts sont versés à la fin de chacune des périodes de prêt.
– Le capital initial reste invariable.

On emprunte un capital C_0 pendant n périodes au taux i par période. L'intérêt à payer après la première période est $I_1 = C_0 \times i$ et, puisque c'est le capital de départ C_0 qui produit l'intérêt ; l'intérêt à payer après chaque période est $C_0 \times i$.

L'intérêt total (ou global) à payer sur n périodes (le coût de l'emprunt) est donc :

$$I_n = C_0 \times i + C_0 \times i + ... + C_0 \times i \quad (n \text{ fois})$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{I_n = C_0 \times i \times n}.$$

La somme totale à rembourser (*valeur définitive* ou *valeur acquise*) du capital C_0 est donc :

$$\boxed{C_n = C_0 + I_n = C_0(1 + i \times n)}.$$

Exemple : Soit un capital de 15000 DH placé à intérêts simples pendant 6 périodes à un taux par période de 13%. Calculons les intérêts (en DH) :

On utilise $I_n = C_0 \times i \times n$ avec $C_0 = 15000, i = 0,13$ et $n = 6$. Donc l'intérêt est $I_6 = 15000 \times 0,13 \times 6 = 11700$.

Remarque :
Si i représente un taux annuel alors n doit être exprimé en années.
Si i représente un taux semestriel alors n doit être exprimé en semestres.
Si i représente un taux trimestriel alors n doit être exprimé en trimestres.
Si i représente un taux mensuel alors n doit être exprimé en mois.

Remarque
Dans le calcul des intérêts, on retient l'année comerciale de 360 jours.
Les mois sont comptés pour leur nombre de jours exact.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Nombre de jours	31	28/29	31	30	31	30

Mois	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
Nombre de jours	31	31	30	31	30	31

Pour une durée comptée en jours :
Soit i un taux annuel.
Si j désigne la durée en jours, la formule de calcul de l'intérêt devient :

$$I = \frac{C_0 \times i \times j}{360}$$

Pour une durée comptée en mois :
Soit i un taux annuel.
Si m désigne la durée en mois, la formule de calcul de l'intérêt devient :

$$I = \frac{C_0 \times i \times m}{12}$$

Exemple : Quel est l'intérêt produit à intérêt simple par un placement d'une somme d'argent de 15400 DH au taux annuel de 11% pendant 75 jours.

Dans ce cas, on a : $C_0 = 15400$ DH, $i = 11\% = 0,11$ et $j = 75$ jours. Alors :

$$I = \frac{15400 \times 0,11 \times 75}{360} = 352,92 \quad DH.$$

Exemple : Soit un capital de 20500 DH placé à intérêt simple du 13 mars au 20 juillet de la même année au taux annuel de $11,5\%$.
Calculer l'intérêt produit par ce placement.

Dans ce cas, On a : $C_0 = 20500$ DH, $i = 11,5\% = 0,115$. Pour la durée, on doit compter le nombre exacte de jours dans chaque mois, la date initiale est exclue et la date finale est incluse.

Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
31-13=18	30	31	30	20

Alors $j = 18 + 30 + 31 + 30 + 20 = 129$ jours.
L'intérêt produit par ce placement est donc :

$$I = \frac{20500 \times 0,115 \times 129}{360} = 844,77 \quad DH.$$

Taux moyen de plusieurs placements (Intérêts simples)

Soient trois capitaux C_1, C_2 et C_3 placés à des taux annuels respectifs i_1, i_2 et i_3 pendant des durées différentes j_1, j_2 et j_3 (en jours par exemple).

capital	Taux	Durée
C_1	i_1	j_1
C_2	i_2	j_2
C_3	i_3	j_3

L'intérêt global procuré par les trois placements est le suivant :

$$I_G = \frac{C_1 i_1 j_1}{360} + \frac{C_2 i_2 j_2}{360} + \frac{C_3 i_3 j_3}{360}$$

$$I_G = \frac{C_1 i_1 j_1 + C_2 i_2 j_2 + C_3 i_3 j_3}{360}$$

Le taux moyen de ces trois placements est un taux unique noté i_{moy}, qui appliqué à l'ensemble de ces trois placements donne le même intérêt global. Soit

$$I_G = \frac{C_1 i_{moy} j_1 + C_2 i_{moy} j_2 + C_3 i_{moy} j_3}{360}$$

$$I_G = i_{moy} \frac{C_1 j_1 + C_2 j_2 + C_3 j_3}{360}$$

Il vient alors

$$\boxed{i_{moy} = \frac{C_1 i_1 j_1 + C_2 i_2 j_2 + C_3 i_3 j_3}{C_1 j_1 + C_2 j_2 + C_3 j_3}}.$$

Cette formule peut être généraliser facilement à p placements :

$$\boxed{i_{moy} = \frac{\sum_{k=1}^{p} C_k i_k j_k}{\sum_{k=1}^{p} C_k j_k}}.$$

Il s'agit de la moyenne arithmétique des taux pondérée par les nombres $C_k j_k$.

Exemple : Calculons le taux moyen des placements suivants :
2000 dh placés pendant 30 jours à 7% ;
7000 dh placés pendant 60 jours à 10% ;
10000 dh placés pendant 50 jours à 9%.
On a :

$$\begin{aligned} i_{moy} &= \frac{(2000 \times 30 \times 0,07) + (7000 \times 60 \times 0,10) + (10000 \times 50 \times 0,09)}{(2000 \times 30) + (7000 \times 60) + (10000 \times 50)} \\ &= 0.093 \\ &= 9,3\%. \end{aligned}$$

2 Escompte

Effet de commerce
L' effet de commerce est un instrument de crédit. Il représente une dette à payer.
Sur un effet de commerce sont indiquées :
1. La valeur nominale de l'effet : c'est le montant inscrit sur l'effet.
2. La date d'échéance : c'est le jour convenu pour le paiement de la dette.
3. La durée : c'est le nombre de jours, de mois (ou d'années) entre la date d'émission de l'effet et sa date d'échéance.

Exemple

Effet de commerce
Valeur nominale : 50000 DH
Date d'échéance : 30/6/2015
Fait à Nador, le 01/01/2015

Durée de cet effet : du 01 janvier au 30 juin, soit 180 jours.

Le bénéficiaire est sensé attendre la date d'échéance pour encaisser son effet, mais : Il peut le vendre avant son échéance. On dit qu'il négocie l'effet avant son encaissement normal : Cette opération est appelée l'escompte.

Escompte commercial
L'escompte commercial d'un effet est une opération bancaire qui consiste à payer au bénéficiaire d'un effet la valeur escomptée de l'effet contre sa valeur nominale avant l'échéance.

L'escompte est l'intérêt retenu par la banque sur la valeur nominale de l'effet pendant le temps qui s'écoule depuis le jour de la remise à l'escompte jusqu'au jour de l'échéance.

Si on désigne par :

C : la valeur nominale de l'effet (V.N), valeur inscrite sur l'effet et payable à l'échéance ;
i : le taux de l'escompte annuel ;
j : la durée de l'escompte en jours (par exemple) ;
E : le montant de l'escompte ;
VE (notée aussi C_0) : la valeur escomptée ;

Le montant de l'escompte est :

$$\boxed{E = \frac{C \times i \times j}{360}}$$

La valeur escomptée est :

$$\boxed{VE = C - E}$$

Soit encore

$$\boxed{VE = C - \frac{C \times i \times j}{360} = C(1 - \frac{i \times j}{360})}$$

Exemple : Un fournisseur négocie le 03 mai un effet d'un montant de 22 500 DH dont l'échéance est le 18 juillet de la même année. La banque escompte l'effet à un taux annuel de 12%.
Quelle est la valeur escomptée de cet effet à la date du 03 mai ?

On a $C = 22500,\ \ i = 12\%$ et $j = (31 - 3) + 30 + 18 = 76$:

$VE = ?$	$C = 22\ 500$ DH	$i = 12\%$
03 mai	18 juillet	
Date de négociation	Date d'échéance	

76 jours

Escompte :

$$E = \frac{C \times i \times j}{360} = \frac{22500 \times 0,12 \times 76}{360} = 570 \text{ DH}$$

Valeur escomptée à la date du 03 mai :

$$VE = C - E = 22500 - 570 = 21\ 930 \text{ DH}$$

Dans un escompte, la valeur escomptée est appelée valeur actuelle.

Quelle est la valeur actuelle de cet effet s'il est négocié le 03 juin au lieu du 03 mai ?

$VE = ?$	$C = 22\ 500$ DH	$i = 12\%$
03 juin	18 juillet	
Date de négociation	Date d'échéance	

45 jours

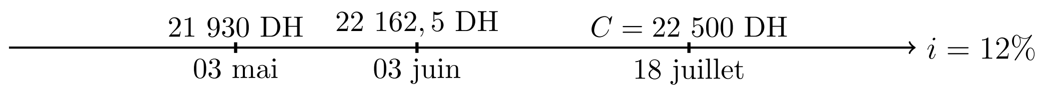
Escompte :

$$E = \frac{C \times i \times j}{360} = \frac{22500 \times 0,12 \times 45}{360} = 337,5 \text{ DH}$$

Valeur escomptée à la date du 03 juin :

$$VE = C - E = 22500 - 337,5 = 22\ 162,5 \text{ DH}$$

Ainsi, cet effet dont la valeur nominale est 22 500 DH et à échéance le 18 juillet a pour valeurs actuelles au 03 mai, 03 juin et 18 juillet :



Remarque. À la date d'échéance : Valeur actuelle = Valeur nominale

2. **Équivalence des capitaux**

De même qu'un créancier peut céder un effet de commerce avant son échéance à une banque, un débiteur peut rembourser une dette avant terme ou repousser son échéance. Puisque la valeur d'une dette est inséparable de la date à laquelle elle est disponible, il suffit pour le créancier et le débiteur de s'entendre sur une date de paiement et sur un taux de calcul pour effectuer l'évaluation de la dette à une date précise.

Définition. Deux effets (ou deux capitaux) sont équivalents à une date donnée, si escomptés au même taux, ils ont la même valeur escomptée (valeur actuelle commerciale). Cette date est la date d'équivalence des deux effets.

Si on désigne par :
C_1 et C_2 : Valeurs nominales (capitaux) ;
j_1 et j_2 : Durées d'escompte en jours ;
i : taux d'escompte annuel ;
VE_1 et VE_2 : valeurs actuelles.

La condition d'équivalence, dans l'escompte commercial s'exprime par l'égalité suivante :

$$VE_1 = VE_2$$

$$\boxed{C_1(1 - \frac{i \times j_1}{360}) = C_2(1 - \frac{i \times j_2}{360})}$$

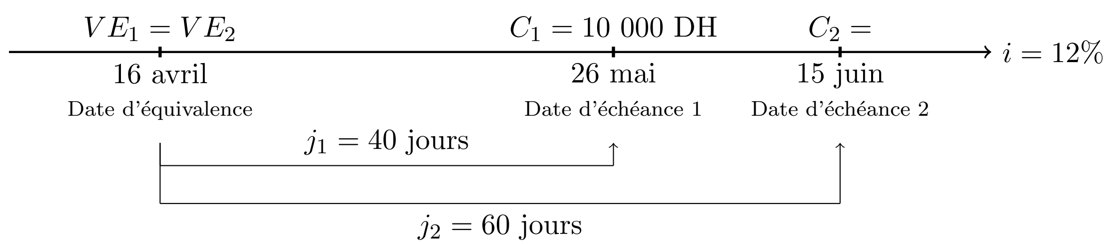
Remarque
Dans la pratique, la notion d'équivalence permet de remplacer un effet par un autre ayant une échéance différente.
Etant donnée la valeur nominale C_1 d'un effet, l'équation d'équivalence à 4 inconnus. Généralement, à l'aide de cette équation

$$C_1(1 - \frac{i \times j_1}{360}) = C_2(1 - \frac{i \times j_2}{360})$$

on peut calculer :
- la valeur nominale de l'effet équivalent ;
- l'échéance de l'effet équivalent ;
- la date d'équivalence ;
- le taux d'équivalence.

Exemple : Un commerçant souhaite remplacer le 16 avril un effet de 10 000 DH arrivant à échéance le 26 mai, par un autre échéant le 15 juin. Déterminer la valeur de l'effet de remplacement sachant que le taux annuel d'intérêt est de 12%.

Étant données les valeurs suivantes :
C_1 : la valeur nominale de l'effet ; $C_1 = 10\ 000$ DH.
C_2 : la valeur nominale de l'effet de remplacement (c'est la valeur recherchée).
j_1 : durée d'escompte relatif à l'effet ; $j_1 = 26$ mai -16 avril $= 40$ jours ;
j_2 : durée d'escompte relatif à l'effet de remplacement ; $j_2 = 15$ juin -16 avril $= 60$ jours.
i : taux d'escompte annuel ; $i = 12\%$.



L'equivalence des deux effets au 16 avril s'écrit : $C_1(1 - \frac{i \times j_1}{360}) = C_2(1 - \frac{i \times j_2}{360})$
donc

$$10000(1 - \frac{0,12 \times 40}{360}) = C_2(1 - \frac{0,12 \times 60}{360})$$

d'où

$$9866,67 = C_2(1 - \frac{0,12}{6})$$

ainsi

$$C_2 = 10068,03 \text{ DH} .$$

Définition. Un effet (ou capital) est équivalent à la somme de plusieurs autres, si escomptés à une date donnée (date d'équivalence), au même taux, et dans le même système d'escompte, la valeur actuelle de l'effet (ou capital) unique est égale à la somme des valeurs actuelles des autres effets (ou capitaux).

Soit un effet de valeur nominale C et 3 effets de valeurs nominales C_1, C_2 et C_3 ayant respectivement j, j_1, j_2 et j_3 jours à courir à la date d'escompte; l'équivalence se traduira par l'égalité suivante :

$$\boxed{C - \frac{C \times i \times j}{360} = C_1 - \frac{C_1 \times i \times j_1}{360} + C_2 - \frac{C_2 \times i \times j_2}{360} + C_3 - \frac{C_3 \times i \times j_3}{360}}$$

Exemple : On souhaite remplacer le 15 juin, les trois effets ci-dessous par un effet unique

Effet	Valeur nominale	Échéance
1	5000	20 août
2	4000	15 juillet
3	12000	20 septembre

Quelle est l'échéance de l'effet de 21200 DH remplaçant les effets $1, 2$ et 3 avec un taux d'escompte de 13%.

Dans ce cas, on a : $C_1 = 5000, C_2 = 4000, C_3 = 12000, C = 21200, t = 13\%$ et
$j_1 = 20$ août -15 juin $= 66$ jours,
$j_2 = 15$ juillet -15 juin $= 30$ jours,
$j_3 = 20$ septembre -15 juin $= 97$ jours,
j est le nombre de jours séparant la date d'équivalence (15 juin) et l'échéance de l'effet unique.
D'où l'équation d'équivalence :

$$C - \frac{C \times i \times j}{360} = C_1 - \frac{C_1 \times i \times j_1}{360} + C_2 - \frac{C_2 \times i \times j_2}{360} + C_3 - \frac{C_3 \times i \times j_3}{360}$$

$$21200 - \frac{21200 \times 0,13 \times j}{360} = 5000 - \frac{5000 \times 0,13 \times 66}{360} + 4000 - \frac{4000 \times 0,13 \times 30}{360} + 12000 - \frac{12000 \times 0,13 \times 97}{360}$$

donc

$$21200 - 7,6555j = 3956,67 + 4880,83 + 11579,67$$

d'où

$$j = 102,257 \quad \text{soit} \quad 103 \text{ jours}$$

L'échéance de l'effet unique sera le 15 juin +103 jours soit le 26 septembre de la même année.