Université Mohamed 1[er]
Faculté Pluridisciplinaire
Département de physique
Nador

Année Univ...
Filière : SMP, S4
Session de printemps : Normale
Pr : M. EL KAOUINI

Examen d'électromagnétisme dans les milieux
(Durée : 1h30)

Questions de cours :

1) Ecrire la forme locale des équations de Maxwell dans les milieux et donner l'interprétation physique de chaque équation.
2) Rappeler, sans démonstration, les relations de passage des composantes normale et tangentielle du vecteur déplacement électrique $\vec{D}$ à la traversée d'une surface (chargée par une densité de charge surfacique σ) séparant deux milieux diélectriques de permittivités ε_1 et ε_2.
3) Rappeler, sans démonstration, les relations de passage des composantes normale et tangentielle du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ à la traversée d'une surface (parcourue par une densité de courant surfacique $\vec{j}$) séparant deux milieux magnétiques de perméabilités μ_1 et μ_2.

Exercice 1 :

On considère dans le vide une sphère diélectrique Σ, de centre O et de rayon R (figure 1). Celle – ci possède une polarisation radiale de la forme : $\vec{P}(r) = \frac{A}{r}\vec{e}_r$, où A est une constante positive et $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{r} = r\vec{e}_r$. Un point M de l'espace sera repéré par ses coordonnées sphériques ($r = OM,\ \theta,\ \varphi$).

1) Déterminer les densités de charges de polarisation surfacique σ_P et volumique ρ_P.
2) Vérifier que la charge totale de polarisation Q_P est nulle.
3) En coordonnées sphériques, étudier la symétrie et les invariances de ce système.
4) Calculer le champ électrique dans les deux régions de l'espace : $r < R$ et $r > R$.
5) Comment appelle t – on ce champ électrique ?
6) Déterminer l'énergie électrostatique de la sphère.

On donne en coordonnées sphériques :

$$div\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$$

Exercice 2 :

Un barreau cylindrique paramagnétique linéaire, homogène, isotrope et de perméabilité μ est placé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$ uniforme et parallèle à l'axe Oz du cylindre (figure 2). Ce barreau a pour rayon R et pour longueur L.

1) Quelles sont les propriétés de l'aimantation $\vec{M}$ qui apparait dans le matériau magnétique ?
2) Exprimer les densités surfaciques $\vec{j}_s$ et volumiques $\vec{j}_V$ des courants d'aimantation.

On suppose que ce système est équivalent à un solénoïde composé de N spires parcourues par un courant I, avec : $NI = \int_0^L j\, dz$, où j est la densité de courant d'aimantation du barreau.

3) Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}_m$ créé par l'aimantation au centre O du barreau en fonction de $\vec{M}$, R et L.

Rappel : Le champ magnétique créé au centre d'un solénoïde de rayon R, de longueur L, comportant N spires parcourues par un courant I et d'axe Oz est : $\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2\sqrt{R^2+L^2/4}}\vec{e}_z$.

4) Dans le cas d'un cylindre infiniment long ($L \gg R$) :
   a) Calculer à nouveau le champ magnétique $\vec{B}_m$ et le champ démagnétisant $\vec{H}_d$ à l'intérieur du barreau.
   b) En déduire la relation entre le champ total dans le barreau $\vec{B}_t$ et $\vec{B}_0$ puis celle entre $\vec{M}$ et $\vec{B}_0$.

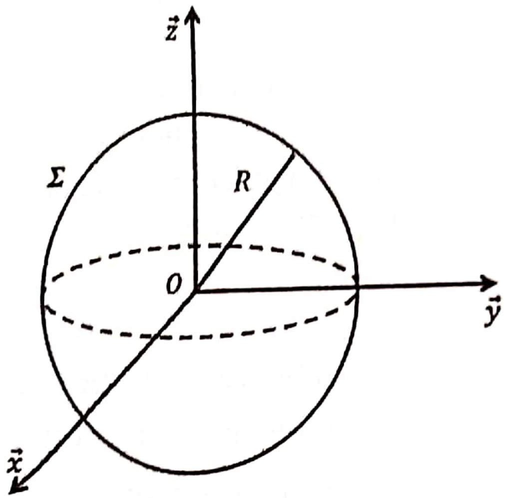


Figure 1

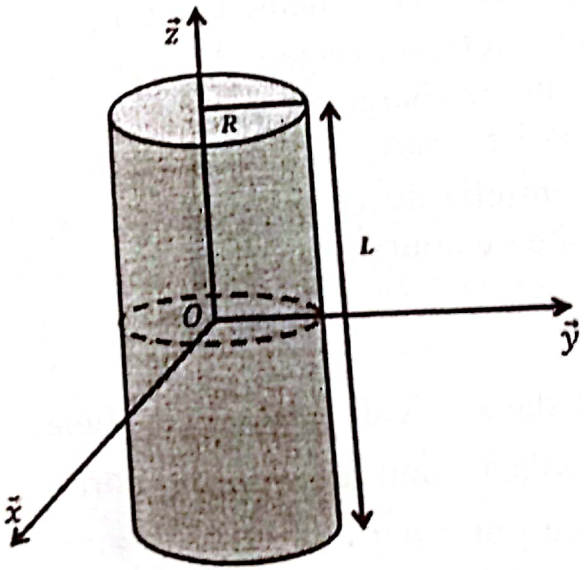


Figure 2

Ex1 :

1) * Densité de charge surfacique :

$\sigma_p = \vec{P}.\vec{n} = P\vec{e_r}.\vec{e_r} = P$

$\Rightarrow \boxed{\sigma_p = \frac{A}{R}}$ à la surface on a $r = R$

* Densité de charge volumique :

$\rho_P = -\mathrm{div}\,\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{A}{r}\right) = -\frac{A}{r^2}$

$\Rightarrow \boxed{\rho_P = -\frac{A}{r^2}}$

2) La charge totale, on a :

$Q_p = \iint_S \sigma_p\, dS + \iiint_V \rho_P\, dV$

$= \iint_S \sigma_p\, 2\pi r dr + \iiint_V \rho_P\, 4\pi r^2 dr$

$= \iint_S \frac{A}{R}\, 2\pi\, r dr + \iiint_V -\frac{A}{r^2}\, 4\pi r^2 dr$

$= \frac{A}{R} 4\pi R^2 - 4\pi A R$

$\Rightarrow Q_p = 0$

3) * Etude de symétrie :

Symétrie sphérique càd tout plan passant par le centre O est un plan de symétrie donc : $\vec{E} = E\vec{e_r}$

* Etude de l'invariance :

Le champ $\vec{E}$ est un invariant par rotation suivant θ et φ, donc

$\boxed{\vec{E} = E(r)\,\vec{e_r}}$

4) Calcul de $\vec{E_p}$ = ?

*) Dans la région $r < R$

D'après le théorème de Gauss, on a

$\iint \vec{E_p}.\vec{dS} = \frac{Q_{pint}}{\varepsilon_0}$ (Avec Q_{pint} est la charge de polarisation dans la zone $r < R$)

$\Rightarrow E_p \cdot 4\pi r^2 = \frac{\iiint \rho_p\, d\tau}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E_p \cdot 4\pi r^2 = -\frac{\iiint \frac{A}{r^2} 4\pi r^2 dr}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E_p = -\frac{A}{\varepsilon_0 r} \Rightarrow \boxed{\vec{E_p} = -\frac{A}{\varepsilon_0 r}\vec{e_r}}$

*) Dans la région $r > R$

De même, on a :

$\iint \vec{E_p}.\vec{dS} = \frac{Q_p}{\varepsilon_0}$ (avec $Q_p = 0$ est la charge de polarisation totale)

$\Rightarrow E_p \cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow \vec{E_p}(r) = \vec{0}$

5) Le champ s'appelle : champ électrique de polarisation ou champ dépolarisant.

6) Énergie électrostatique de la sphère

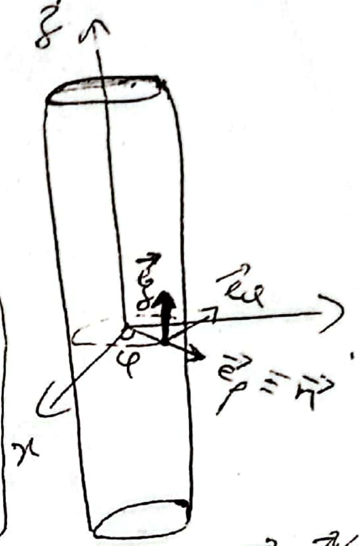
On a : $W = \frac{1}{2}\iiint_{espace} \varepsilon_0 E_p^2\, d\tau$

$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2\varepsilon_0} A^2 4\pi R}$

Ex2 :

1) Il s'agit d'un milieu magnétique L.H.I plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme et // à $\vec{Oz}$ $\vec{B} \parallel \vec{Oz}$, donc le milieu acquiert une aimantation uniforme et // aux lignes du champ $\vec{B}$

d'où $\boxed{\vec{M} = M\vec{e_z}}$



2) *Densité de courant surfacique :

$$\vec{j_s} = \vec{M} \wedge \vec{n}$$

$$\boxed{\vec{j_s} = M\vec{e_\varphi}}$$

*Densité de courant volumique :

$$\vec{j_v} = \vec{rot}\,\vec{M} = \vec{0} \quad (\text{car } \vec{M} \text{ est uniforme})$$

3) Le barreau se comporte comme un solénoïde formé de N spires parcourus d'un courant I, d'où

$$\vec{B}_m(0) = \frac{\mu_0 I N}{2\sqrt{R^2 + L^2/4}}\,\vec{e_z}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{4}}} \int_0^L j\,dz\ \vec{e_z}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\sqrt{R^2 + L^2/4}} \int_0^L j_s\,dz\ \vec{e_z} \quad (\text{car } \vec{j_v} = \vec{0})$$

$$\boxed{\vec{B}_m(0) = \frac{\mu_0 L}{2\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{4}}}\,\vec{M}}$$

4) a) $L \gg R \Rightarrow \frac{R}{L} \longrightarrow 0$

d'où *) $\vec{B}_m(\cancel{0}) = \dfrac{\mu_0 L}{2L\sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{L}\right)^2}_{\approx 0} + \frac{1}{4}}}\,\vec{M}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_m(\cancel{0}) = \mu_0 \vec{M}}$$

*) on a : $\vec{H_d} = \dfrac{\vec{B_m}}{\mu_0} - \vec{M}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H_d} = \vec{0}}$$

b) $\vec{B_t} = \vec{B_0} + \vec{B_m} = \vec{B_0} + \mu_0\vec{M}$

on a : $\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \dfrac{\vec{B_t}}{\mu}$

$$\Rightarrow \vec{M} = \chi_m\left[\frac{\vec{B_0}}{\mu} + \frac{\vec{B_m}}{\mu}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \chi_m\left[\frac{\vec{B_0}}{\mu} + \frac{\mu_0}{\mu}\vec{M}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{M}\left(1 - \frac{\chi_m}{\mu_r}\right) = \frac{\chi_m}{\mu}\vec{B_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0(\mu_r - \chi_m)}\,\vec{B_0}}$$

$$\Rightarrow \vec{B_t} = \vec{B_0} + \mu_0\chi_m\frac{\vec{B_t}}{\mu}$$

$$\Rightarrow \vec{B_t}\left(1 - \frac{\chi_m}{\mu_r}\right) = \vec{B_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B_t} = \frac{\mu_r}{\mu_r - \chi_m}\,\vec{B_0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B_t} = \mu_r \vec{B_0}} \quad \text{car } \chi_m = (\mu_r - 1)$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{(\mu_r - 1)}{\mu_0}\vec{B_0}$$