Université Mohamed Premier **Année universitaire 2021/2022**
Faculté Pluridisciplinaire de Nador **Filières SMP(S4), SMC(S4)**
Département de Physique **Prof. : Said Ouannasser**

Examen, Session de Rattrapage (*Durée*: 1*h* 30 *min*)
Module 24: Mécanique Quantique

Exercice 1 (10 points)

On considère un atome hydrogénoïde de numéro atomique Z. En appliquant le modèle de Bohr à ce système, on peut montrer que les niveaux d'énergie de l'électron sont quantifiés et ont pour expression:

$$E_n = -Ry\frac{Z^2}{n^2}$$

où Ry est la constante de Rydberg.

1. Soit λ_{mn} la longueur d'onde de la lumière lorsqu'un électron passe d'un niveau m vers un niveau n.

a) Que représente la constante Ry pour l'atome d'hydrogène ? Justifier votre réponse.

b) Déterminer l'expression de la longueur d'onde λ_{mn} de la lumière. Donner les conditions sur m et n pour avoir: i) l'absorption de la lumière, ii) l'émission de la lumière.

2. La fonction d'onde de l'état fondamental de l'atome d'hydrogénoïde peut s'écrire:

$$\varphi(r) = A\, e^{-Zr/a_0}$$

où A est une constante positive et a_0 le rayon de *Bohr*.

a) Donner le niveau d'énergie correspondant à la fonction d'onde $\varphi(r)$.

b) En utilisant la relation de normalisation de la fonction d'onde $\varphi(r)$, établir l'expression de la constante A en fonction de Z et a_0.

On pourra utiliser le développement suivant: $\int_0^\infty e^{-\alpha r}\, r^n\, dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$

c) Déterminer la probabilité $P(a_0)$ pour que l'électron se trouve dans une sphère de rayon a_0, centrée en $r = 0$.

Exercice 2 (10 points)

Une particule de masse m et d'énergie E est animée d'un mouvement de vibrations, dans un espace à une dimension suivant la direction x $\left(x \in \left]-\infty, +\infty\right[\right)$. Cette particule est soumise à un potentiel d'expression:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

où ω la pulsation des vibrations.

1. Donner l'expression de l'opérateur hamiltonien H et écrire l'équation de Schrödinger des états stationnaires $\varphi(x)$ de la particule.

2. La fonction d'onde de l'état fondamental, solution de l'équation différentielle précédente, est de la forme:

$$\varphi(x) = A\,e^{-\alpha x^2}$$

où A et α des constantes positives.

En injectant l'expression de $\varphi(x)$ dans l'équation différentielle, déterminer la constante α ainsi que l'énergie propre E de la particule en fonction de m, $\hbar$ et ω.

3. Ecrire la relation de normalisation de la fonction d'onde $\varphi(x)$ puis établir l'expression de la constante A en fonction de m, $\hbar$ et ω.

On pourra utiliser l'intégrale suivante: $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

4. Que représente la quantité $\|\varphi(x)\|^2$? Donner son expression puis tracer son allure en fonction de x