Université Mohamed Premier
Faculté Pluridisciplinaire de Nador
Département de Physique

Année universitaire 2022/2023
Filière SMP, Semestre 4
Prof. : Said Ouannasser

Examen, Session Ordinaire (*Durée*: 1*h* 30 *min*)
Module 24: Mécanique Quantique

Exercice 1 (6 points)

D'après le modèle de Bohr, les niveaux d'énergie de l'électron dans l'atome d'hydrogène sont quantifiés et ont pour expression:

$$E_n = -\frac{Ry}{n^2}$$

où n est un entier naturel non nul ($n = 1, 2, 3, \dots$) et $Ry = 13{,}6$ (eV) la constante de Rydberg. On suppose que l'atome d'hydrogène se trouve dans le premier état excité ($n = 2$) et sa fonction d'onde a pour expression :

$$\varphi(r) = Are^{-r/2a_0}$$

où A une constante positive et a_0 le rayon de Bohr.

1. Calculer (en eV puis en joules) la variation de l'énergie ΔE entre le premier état excité et l'état fondamental. En déduire la longueur d'onde λ correspondante.

On donne: $h \approx 6{,}6262.10^{-34}$ j.s ; $c = 3.10^8$ m.s^{-1} ; 1 eV = $1{,}6.10^{-19}$ j

2. Montrer que la densité de probabilité de présence $\|\varphi(r)\|^2$ présente un maximum en un point que l'on déterminera. Représenter l'allure de $\|\varphi(r)\|^2$ en fonction de r.

3. En utilisant la relation de normalisation de la fonction d'onde $\varphi(r)$, établir l'expression de la constante A en fonction de a_0. On rappelle que l'élément de volume dV en coordonnées sphériques peut s'écrire : $dV = 4\pi r^2 dr$.

On pourra utiliser le développement suivant: $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\beta r}\, r^n\, dr = \frac{n!}{\beta^{n+1}}$

Exercice 2 (8 points)

On considère une particule de masse m et d'énergie E ($E > 0$) dont le mouvement s'effectue dans la direction x. Cette particule arrive de la région 1 ($x < 0$) vers la région 2 ($x > 0$) et rencontre un potentiel $V(x)$ en forme de marche de potentiel (figure 1) :

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ V(x) = -V_0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où V_0 est une quantité positive.

1. Rappeler l'équation de Schrödinger des états stationnaires $\varphi(x)$ d'une particule puis écrire les équations différentielles que doit obéir les fonctions propres $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ de la particule dans chacune des deux régions respectivement.

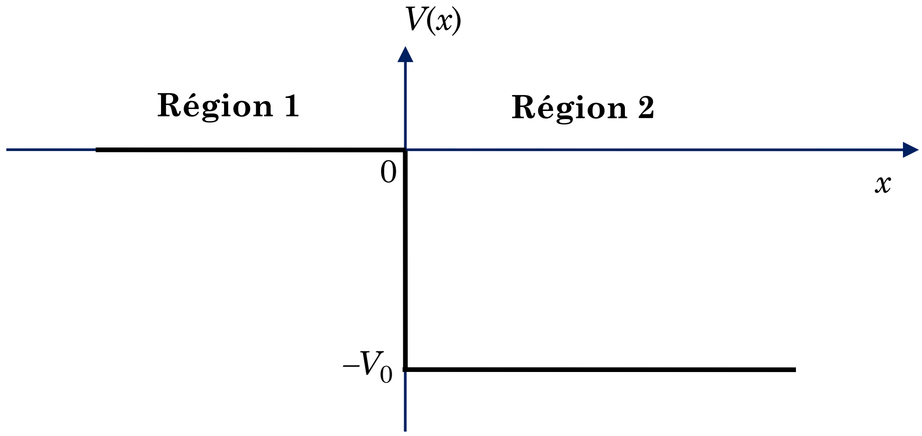

***Fig.*1** *: Marche de potentiel*

2. Résoudre les équations précédentes et montrer que les solutions peuvent s'écrire:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = A\,e^{+ik_1x} + B\,e^{-ik_1x} & \text{si } x < 0 \\ \varphi_2(x) = C\,e^{+ik_2x} + D\,e^{-ik_2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Donner les expressions de k_1 et k_2.

3. On fixera $D = 0$ (pour éviter la réflexion dans la région 2) et on pose $\alpha = \dfrac{B}{A}$ et $\beta = \dfrac{C}{A}$.

a) Ecrire les équations de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée au point $x = 0$ puis déterminer les expressions de α et β en fonction de k_1 et k_2.

b) Dans le cas présent, on définit les coefficients de réflexion R et de transmission T par: $R = \|\alpha\|^2$ et $T = \dfrac{k_2}{k_1}\|\beta\|^2$. Exprimer R et T en fonction de k_1 et k_2 puis calculer $R + T$.

__**Exercice 3**__ (6 points)

1. Soient M et N deux opérateurs linéaires dont les représentations matricielles, dans une base orthonormée, sont données par :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -i \\ 5 & 1 & 4i \\ i & -4i & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} 3i & 1 & -5i \\ 1 & 7 & 2 \\ 5i & -2 & -3i \end{bmatrix}$$

a) Calculer $(M + N)$ et vérifier que $Tr(M + N) = TrM + TrN$

b) Déterminer les adjoints de M et N. Ces opérateurs sont – ils hermitiques ?

2. Soit $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ une base orthonormée dont laquelle l'opérateur A s'écrit sous la forme:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Ecrire l'équation aux valeurs propres de A et déterminer ses valeurs propres λ_1 et λ_2.

b) Déterminer les vecteurs propres $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2.