Université Mohamed Premier
Faculté Pluridisciplinaire de Nador
Département de Physique

Année universitaire 2022/2023
Filière SMP, Semestre 4
Prof. : Said Ouannasser

Examen, Session Ordinaire (*Durée*: 1*h* 30 *min*)
Module 24: Mécanique Quantique

Exercice 1

On réalise une expérience d'effet photoélectrique à l'aide d'une cellule photoélectrique dont l'énergie d'extraction est $W_0 = 4{,}14$ eV.

1. Expliquer brièvement l'effet photoélectrique et donner le schéma du montage permettant de produire un photo-courant (I_{ph}).

2. Dans cette expérience, on a utilisé trois longueurs d'ondes λ différentes (voir tableau). Calculer les fréquences ν des différents rayonnements utilisés (Présenter les résultats sous forme d'un tableau).

λ (nm)	200	400	600

3. Déterminer la fréquence ν_0 du seuil photoélectrique. Parmi les trois longueurs d'ondes utilisées, quelles sont celles qui satisfont l'effet photoélectrique ? Justifier votre réponse.

4. Déterminer l'expression de la vitesse v des photoélectrons en fonction de ν, ν_0, h et m. Calculer la valeur numérique de v pour les radiations qui satisfont l'effet photoélectrique.

On donne :
Masse d'un électron $m = 9{,}11.10^{-31}$ kg; Constante de Planck $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s ; Célérité $c = 3.10^{8}$ m.s^{-1}; 1 eV = $1{,}6.10^{-19}$ J

Exercice 2

Une particule de masse m et d'énergie E est animée d'un mouvement de vibrations, dans un espace à une dimension suivant la direction x $\left(x \in \left]-\infty,+\infty\right[\right)$. Cette particule est soumise à un potentiel d'expression:

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \ ; \ \omega \text{ la pulsation des vibrations.}$$

1. Donner l'expression de l'opérateur hamiltonien H et écrire l'équation de Schrödinger des états stationnaires $\varphi(x)$ de la particule.

2. La fonction d'onde stationnaire $\varphi(x)$ de l'état fondamental de la particule peut s'écrire sous la forme:

$$\varphi(x) = A\, e^{-\alpha x^2} \ ; \ A \text{ et } \alpha \text{ des réels positifs}$$

En injectant l'expression de $\varphi(x)$ dans l'équation différentielle précédente, déterminer la constante α ainsi que l'énergie propre E de la particule en fonction de m, $\hbar$ et ω.

3. Ecrire la relation de normalisation de la fonction d'onde $\varphi(x)$ puis établir l'expression de la constante A en fonction de m, $\hbar$ et ω. On pourra utiliser le résultat de l'intégrale suivante: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$

Exercice 3

1. Soient A et B deux opérateurs linéaires dont les représentations matricielles, dans une base orthonormée, sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3i \\ 3i & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$$

a) Calculer la trace des opérateurs A, B, A^2 et B^2.

b) Parmi ces quatre opérateurs (A, B, A^2, B^2), lesquels sont hermitiques (ou hermitiens) ? Justifier votre réponse.

2. Soit $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ une base orthonormée dont laquelle l'opérateur M s'écrit sous la forme:

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

a) Ecrire l'équation aux valeurs propres de M et déterminer ses valeurs propres λ_1 et λ_2.

b) Déterminer les vecteurs propres $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2.

On considère une particule de masse m dont le mouvement est assimilé à un oscillateur harmonique à une dimension suivant la direction x $\left(x \in \left]-\infty,+\infty\right[\right)$. Cette particule est soumise à un potentiel $V(x)$ d'expression:

$$V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

où ω la pulsation des oscillations harmoniques.

1. Donner l'expression de l'opérateur hamiltonien H de la particule et rappeler l'équation de Schrödinger décrivant l'évolution de la fonction d'onde totale $\psi(x,t)$ en fonction du temps.

2. La fonction d'onde totale $\psi(x,t)$ de l'état fondamental de la particule s'écrit sous la forme:

$$\psi(x,t)=C\,e^{-\alpha x^2}e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t}$$

où C et α des constantes positives, et E_0 l'énergie de l'état fondamental de la particule.
En injectant l'expression de $\psi(x,t)$ dans l'équation précédente, déterminer la constante α et l'énergie E_0 en fonction de m, $\hbar$ et ω.

3. Ecrire la relation de normalisation de la fonction d'onde $\psi(x,t)$ puis établir l'expression de la constante C en fonction de m, $\hbar$ et ω.

On pourra utiliser le résultat de l'intégrale suivante: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$

Université Mohamed Premier
Faculté Pluridisciplinaire de Nador
Département de Physique

Année universitaire 2018/2019
Filières SMP(S4), SMC(S4)
Prof. : Said Ouannasser

Examen, Session Ordinaire (*Durée*: 1*h* 30 *min*)
Module 24: Mécanique Quantique

Exercice 1 (10 points)

On considère une particule de masse m dont le mouvement est assimilé à un oscillateur harmonique à une dimension suivant la direction x $\left(x \in \left]-\infty,+\infty\right[\right)$. Cette particule est soumise à un potentiel $V(x)$ d'expression:

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

où ω la pulsation des oscillations harmoniques.
La fonction d'onde $\psi(x,t)$ de l'état fondamental de la particule s'écrit sous la forme:

$$\psi(x,t) = C\, e^{-\alpha x^2} e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t}$$

où C et α des constantes positives, et E_0 l'énergie de l'état fondamental de la particule.

1. Donner l'expression de l'opérateur hamiltonien H de la particule et rappeler l'équation de Schrödinger décrivant l'évolution de la fonction d'onde $\psi(x,t)$ en fonction du temps.

2. En injectant l'expression de $\psi(x,t)$ dans l'équation précédente, déterminer la constante α et l'énergie E_0 en fonction de m, $\hbar$ et ω.

3. Ecrire la relation de normalisation de la fonction d'onde $\psi(x,t)$ puis établir l'expression de la constante C en fonction de m, $\hbar$ et ω.

4. Déterminer l'expression de $\left\|\psi(x,t)\right\|^2$ puis tracer son allure en fonction de x. Que représente cette quantité ?

5. La valeur moyenne d'une observable A quelconque dans l'état $\psi(x,t)$ est définie par :

$$\langle A \rangle = \int \psi^*(x,t) A \psi(x,t) dx$$

Déterminer la valeur moyenne de l'énergie totale $\langle H \rangle$ de la particule dans l'état fondamental.

On pourra utiliser dans cet exercice l'intégrale suivante: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$

Exercice 2 (7 points)

On considère une particule, de masse m et d'énergie E, effectuant un mouvement d'oscillations dans un espace à une dimension suivant la direction x $\left(x \in \left]-\infty,+\infty\right[\right)$. Cette particule est soumise à un potentiel d'expression:

$$V(x) = \frac{1}{2} K x^2$$

où K est la constante de force de rappel.

1. Donner l'expression de l'opérateur hamiltonien H et écrire l'équation de Schrödinger des états stationnaires $\varphi(x)$ de la particule.

2. La fonction d'onde de l'état fondamental, solution de l'équation différentielle précédente, est de la forme:

$$\varphi(x) = A\,e^{-\alpha x^2}$$

où A et α des constantes réelles positives.

a) En injectant cette fonction dans l'équation différentielle, déterminer la constante α ainsi que l'énergie propre E de la particule en fonction de m, $\hbar$ et K.

b) Ecrire la relation de normalisation de la fonction d'onde $\varphi(x)$ puis établir l'expression de la constante A. On pourra utiliser le résultat de l'intégrale suivante: $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$

3. La fonction d'onde totale $\psi(x,t)$ de la particule peut s'écrire sous la forme:

$$\psi(x,t) = \varphi(x)\,e^{-i\omega t}$$

a) Donner l'expression de $\|\psi(x,t)\|^2$. Que représente cette quantité ?

b) Tracer l'allure graphique de $\|\psi(x,t)\|^2$ en fonction de x.

4. Soit $P(x)$ la densité de probabilité de présence de la particule. Donner l'expression de $P(x)$ puis tracer son allure en fonction de x.

On pourra utiliser l'intégrale suivante: $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Une particule de masse m et de charge q est animée d'un mouvement suivant la direction x $\left(x \in \left[0, +\infty\right[\right)$. Cette particule est soumise à un potentiel de type coulombien d'expression:

$$V(x) = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

1. Soient E l'énergie de la particule et $\varphi(x)$ sa fonction d'onde d'état stationnaire. Donner l'expression de l'opérateur hamiltonien H puis écrire l'équation de Schrödinger des états stationnaires de cette particule.

2. L'équation différentielle précédente peut avoir une solution de la forme:

$$\varphi(x) = Ax\exp(-\alpha x)$$

où A et α sont des constantes positives.

a) En injectant cette fonction dans l'équation différentielle précédente, déterminer la constante α ainsi que l'énergie propre E de la particule en fonction de m, q, $\hbar$ et ε_0.

b) Ecrire la relation de normalisation de la fonction d'onde $\varphi(x)$ puis établir l'expression de la constante A. On pourra utiliser le résultat de l'intégrale suivante: $\int_0^\infty e^{-\lambda x}\, x^n\, dx = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$

3. La fonction d'onde totale $\psi(x,t)$ de la particule peut s'écrire sous la forme:

$$\psi(x,t) = \varphi(x)\, e^{-i\omega t}$$

a) Ecrire l'équation de Schrödinger à laquelle obéit la fonction d'onde $\psi(x,t)$.

b) Que représente la quantité $\|\psi(x,t)\|^2$? Montrer que $\|\psi(x,t)\|^2$ présente un maximum pour une valeur de x que l'on calculera en fonction de m, q, $\hbar$ et ε_0.

c) Tracer l'allure graphique de $\|\psi(x,t)\|^2$ en fonction de x.

On considère une particule de masse m animée d'un mouvement dans un espace à une dimension suivant la direction Ox. Soient H l'opérateur hamiltonien associé à cette particule et $\psi(x,t)$ sa fonction d'onde qui peut s'écrire sous la forme:

$$\psi(x,t) = C\, e^{-\frac{x}{a}}\, e^{i(kx-\omega t)} \qquad \text{avec } x \in [0,+\infty[$$

C et a sont des constantes positives.

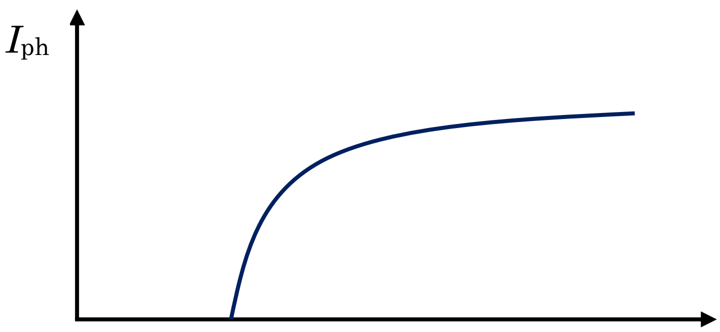
1. Déterminer la constante C pour que la fonction d'onde $\psi(x,t)$ soit normée à l'unité.

2. Que représente la quantité $\|\psi(x,t)\|^2$? Tracer l'allure de $\|\psi(x,t)\|^2$ en fonction de x.

On réalise une expérience d'effet photoélectrique en utilisant une cellule photoélectrique d'argent dont l'énergie d'extraction est W = 4,30 eV. Ce dispositif permet d'éclairer cette cellule par des radiations lumineuses afin de produire un courant photoélectron (I_{ph}).

1. Donner le schéma du montage permettant de réaliser une expérience d'effet photoélectrique.

2. En fonction de la fréquence ν de la radiation lumineuse, le photo-courant (I_{ph}) peut avoir l'allure suivante:



ν_0 ν

Expliquer brièvement cette courbe puis calculer la fréquence ν_0 de la cellule d'argent.

3. Les longueurs d'ondes des radiations utilisées dans cette expérience sont regroupées dans le tableau suivant:

λ (nm)	100	200	300	400

Calculer les fréquences ν des différents rayonnements utilisés (Présenter les résultats sous forme d'un tableau). Parmi les quatre longueurs d'ondes utilisées, quelles sont celles susceptibles de satisfaire l'effet photoélectrique ?

4. Après avoir écrire l'équation d'Einstein pour la conservation de l'énergie, déterminer l'expression de la vitesse v des photoélectrons en fonction de ν, ν_0, la constante de Planck h et la masse m de l'électron. Calculer v pour les radiations qui sont susceptibles de produire l'effet photoélectrique.

On donne: $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg; $c = 3.10^{8}$ m.s^{-1} ; $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s ; 1 eV $= 1{,}6.10^{-19}$ J

<u>Exercice 2</u> (10 points)

Une particule de masse m et d'énergie E est animée d'un mouvement, dans un espace à une dimension, suivant la direction x ($x \rangle 0$). Cette particule est soumise à un potentiel de type coulombien d'expression:

$$V(x) = -\frac{A}{x}$$

où A est une constante positive.

1. Donner l'expression de l'opérateur hamiltonien H et écrire l'équation de Schrödinger des états stationnaires $\varphi(x)$ de la particule.

2. Cette équation différentielle admet une solution, appartenant à l'espace des fonctions d'onde, de la forme:

$$\varphi(x) = Cx\exp\left(-\frac{x}{a}\right)$$

où C et a sont des constantes.

Déterminer la constante a et l'énergie E de la particule en fonction de m, A et $\hbar$.

3. Ecrire la relation de normalisation de la fonction d'onde $\varphi(x)$ puis établir l'expression de la constante C.

4. Donner l'expression de la densité de probabilité de présence $D(x)$ de la particule. Montrer que $D(x)$ présente un maximum pour une valeur de x que l'on calculera en fonction de a.

5. Représenter l'allure de la densité de probabilité de présence $D(x)$ en fonction de x.