UNIVERSITE MOHAMMED V
FACULTE DES SCIENCES- RABAT

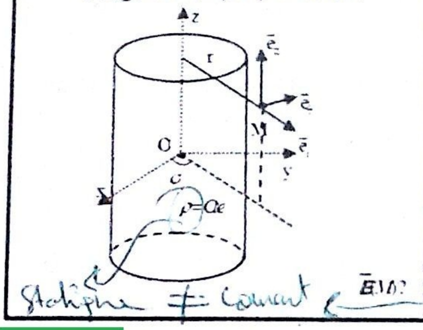
série 1

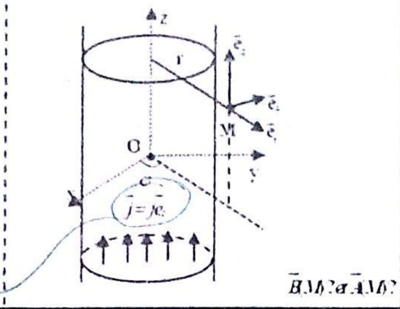
Année universitaire 2014-2015
SMP 4. Module23 : Electricité 3

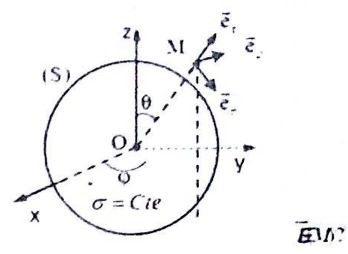
# TD Electricité III- Série I : Milieux diélectriques

**Exercice 1** : En utilisant les règles de symétrie des sources, donner en un point M quelconque de l'espace la dépendance en variables et la direction des champs pour les systèmes suivants :

| Système 1 | Système 2 | Système 3 |
|---|---|---|
| Cylindre de hauteur h et de rayon R portant une densité de charge volumique ρ uniforme | Cylindre infini parcouru par un courant de densité volumique $\vec{j}$ uniforme | Sphère de rayon R, de centre O Portant une densité de charge Surfacique σ uniforme |




**Exercice 2** On considère une sphère de centre O, de rayon R et de densité de charge volumique uniforme $\rho = \rho_0$ à l'intérieur et $\rho = 0$ à l'extérieur. On supposera que la surface de la sphère est non chargée.

Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point M de l'espace.

a- En utilisation du théorème de gauss (forme intégrale)

b- En utilisant la forme locale (différentielle) du théorème de Gauss.

On donne en coordonnées sphériques $div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

***Exercice 3*** Soit une distribution surfacique de densité de charge $\sigma = \sigma_0 \cos(\theta)$ portée par une sphère de centre O et de rayon R. ($\sigma_0$ est une constante positive et $\theta$ est l'angle que fait le vecteur position $\overrightarrow{OP}$ d'un point P de la surface avec une direction déterminée Oz). Calculer la charge totale portée par la sphère ainsi que le moment dipolaire de cette distribution.

***Exercice 4*** Soit un cylindre diélectrique de hauteur h, de rayon R et d'axe de révolution Oz. Ce cylindre possède une polarisation uniforme $\vec{P} = P\,\vec{e}_z$ due à un champ électrique extérieur $\vec{E}_0$ uniforme.

1) Calculer les densités de charge de polarisation.

2) Calculer le champ électrique $\vec{E}_d$, créé en son centre O, par les charges de polarisation.

***Exercice 5*** On considère un cylindre diélectrique, de rayon R et de longueur infinie, possédant une polarisation permanente de la forme $\vec{P}(M) = P_0 \frac{\vec{r}}{r^3}$, où $P_0$ est une constante positive et r la distance d'un point M situé à l'intérieur du cylindre à l'axe zz' du cylindre. On utilisera le système de coordonnées cylindriques ($r, \theta, z$) et on supposera que le cylindre ne porte aucune charge libre.

1) Calculer les densités de charge de polarisation.

2) En utilisant les propriétés de symétrie, trouver la dépendance en variables de $\vec{E}(M)$ et $\vec{D}(M)$ ainsi que leur direction.

3) En appliquant le théorème de Gauss à ce cylindre, calculer l'expression de $\vec{D}(M)$. En déduire celle de $\vec{E}(M)$. On donne en coordonnées cylindriques : $div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

→ L.H.I $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$

**Exercice 6 (rattrapage 2014) :** Soit une sphère de rayon $a$ constituée d'un diélectrique parfait (l.h.i) de permittivité relative $\varepsilon_r$. Au centre de cette sphère, est placée une charge ponctuelle $Q$ que l'on suppose logée dans une cavité microscopique sphérique de rayon $b$ (voir figure).

1- En utilisant les propriétés de symétrie, trouver la dépendance en variables du champ électrique $\vec{E}$ et du champ d'induction électrique $\vec{D}$ ainsi que leur direction.

2- Déterminer l'expression du champ d'induction électrique $\vec{D_i}$ en un point M du diélectrique à l'aide du théorème de Gauss. En déduire l'expression $\vec{E_i}$ du champ électrique au même point.

3- Déterminer le vecteur polarisation $\vec{P}$ en fonction des données du problème.

4- a : Déterminer les densités de charges de polarisation volumique $\rho_p$ et surfacique $\sigma_p$.

b: En déduire les charges de polarisation.

5- Déterminer le champ $\vec{E_d}$ créé par les charges de polarisation au point M à l'intérieur du diélectrique. Représenter sur une figure les champs $\vec{E_i}$ et $\vec{E_d}$ sachant que $Q \prec 0$.

6- Donner les expressions du champ électrique $\vec{E_e}$ et du champ d'induction électrique $\vec{D_e}$ à l'extérieur du diélectrique $(r \succ a)$, ainsi que leur discontinuité à la surface du diélectrique $(r = a)$.

7- Déterminer l'énergie électrique emmagasinée dans le diélectrique en fonction de $Q, \varepsilon_0, \varepsilon_r, a$ et $b$.

**Exercice 7** Dans un champ électrique uniforme $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_z$ de module $E_0$, on place une sphère diélectrique (S), de centre O et de rayon R. Le diélectrique est linéaire, homogène et isotrope, de permittivité diélectrique $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$. On suppose que le champ $\vec{E}_0$ n'est pas modifié par l'introduction du diélectrique, que la polarisation $\vec{P} = P\vec{e}_z$ ($P > 0$) est uniforme sur tout le volume de la sphère et que le champ électrique est uniforme à l'intérieur de la sphère.

1) Calculer le champ total $\vec{E}_i$ ainsi que le vecteur excitation $\vec{D}_i$ correspondant, à l'intérieur de la sphère. En déduire l'expression de $\vec{P}$ ainsi que celle de $\vec{E}_i$ et $\vec{D}_i$ en fonction $\vec{E}_0$, $\varepsilon$ et $\varepsilon_0$.

A quel système électrostatique la sphère est-elle équivalente pour la région extérieure à la sphère.

2) On suppose que le champ $\vec{E}_P(M)$ créé par la polarisation à l'extérieur de la sphère diélectrique est équivalent à celui d'un dipôle de moment $\vec{p} = p\vec{e_z}$ placé au point O. Pour un point M extérieur à la sphère tel que $\overline{OM} = \vec{r} = r\vec{e}_r$ et $(OM,Oz) = \theta$ (coordonnées sphériques).

a : Donner dans ce cas l'expression du potentiel $V_P(M)$.

b : En déduire les expressions des champs $\vec{E}_P(M)$ et $\vec{D}_P(M)$

3) Soient $\vec{E}_e(M) = \vec{E}_0 + \vec{E}_P(M)$ et $\vec{D}_e(M) = \varepsilon_0\vec{E}_e(M)$ les champs à l'extérieur à la sphère

a : En exprimant la continuité de la composante normale de $\vec{D}$ au voisinage de la surface, trouver la valeur qu'il faut donner à $\vec{p}$ pour assurer cette continuité.

c : Vérifier que cette valeur de $\vec{p}$ assure la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$.

On donne en coordonnées sphériques $\vec{\nabla}V = \overrightarrow{grad}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$

**SMP4.Module23 : électricité 3. Mars2015**
**Figures des exercices de TD de la série 1**

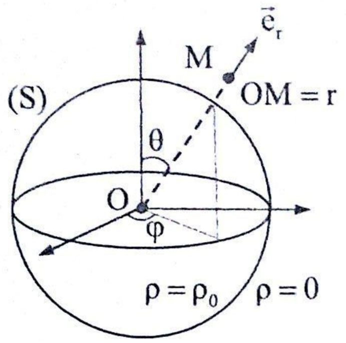



**Figure exercice 2**

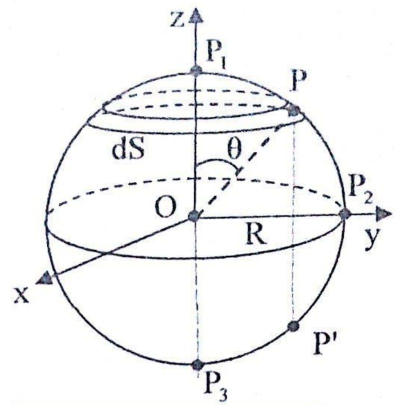



**Figure exercice 3**

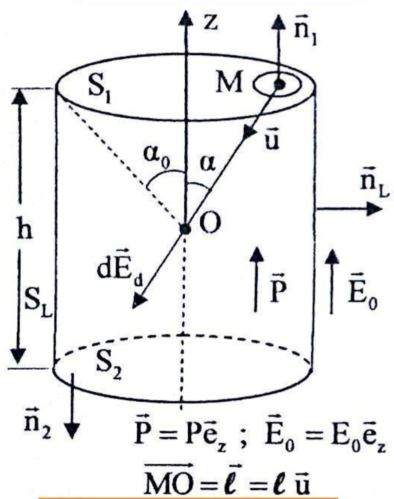



**Figure exercice 4**

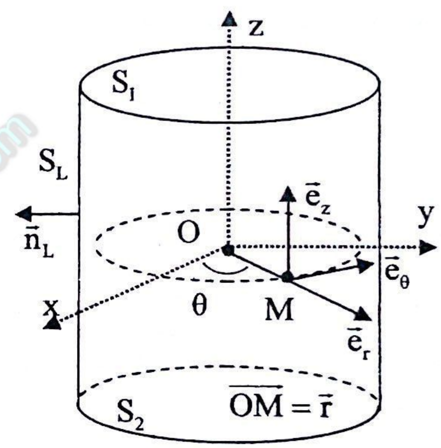
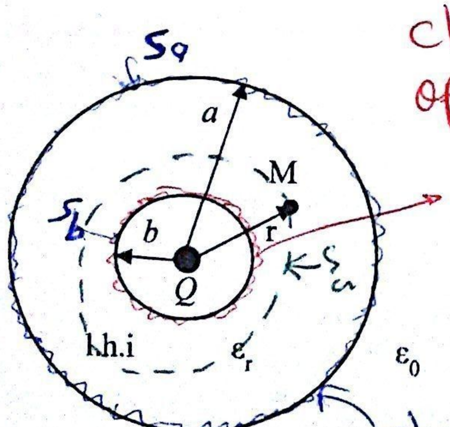


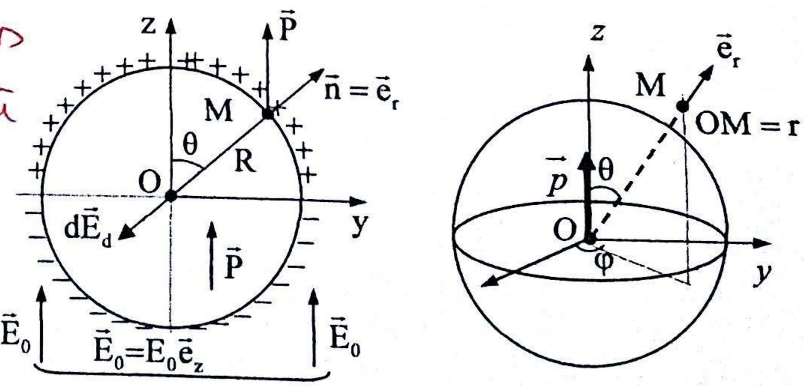

**Figure exercice 5**




charges opposé à q

**Figure exercice 6**

charges de m̂ signe que q.




**Figures exercice7**

① 

# Série n° 1

## Exercice 1

Système ① - la seul transformation géométrique qui laisse le syst invariant est la rotation autour de Oz

$\Rightarrow$ le syst a une symetrie axiale

$\Rightarrow$ choix du syst de coord :

coord cylindrique $(r, \varphi, z) \rightarrow$ base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$

$\vec{E}(M : r, \varphi, z) = \vec{E}(r, z)$

le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symetrie

un vecteur polaire $\in$ P.S et $\perp$ P.A.S

un vecteur axiale $\perp$ P.S $\in$ P.A.S

$\vec{E}$ est un vecteur Polaire $\Rightarrow \vec{E} \in$ P.S

$\Rightarrow \vec{E}(M, r, \varphi) = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z$

Système ② Invariance par translation le long de $\vec{Oz}$

" " rotation autour de $\vec{Oz}$

$\Rightarrow$ le système a une symétrie cylindrique :

$\vec{A}(M; r, \varphi, z) = \vec{A}(r)$

$\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$

le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un P.S

" $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ " " P.A.S

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{|PM|^3}$$

$\Rightarrow \vec{B}$ est un vect axial

$$d\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\vec{dl}}{r}$$

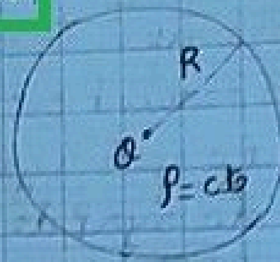
$\Rightarrow \vec{A}$ est un vecteur polaire

$\vec{B} \perp$ P.S $\quad \vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\varphi$

$\vec{A} \perp$ P.S $\quad \vec{A}(M) = A(r)\vec{e}_z$

2

## Exercice 2:




- Tout rotation autour de O laisse le système invariant ($\rho = cte$).

$\Rightarrow$ le système a une symétrie sphérique

$\Rightarrow$ choix du syst de coord:

coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$

$\vec{E}(M: r, \theta, \varphi) = \vec{E}(r)$

Tous les plans contenant OM sont des P.S

$\vec{E}$ est un vect polaire $\Rightarrow \vec{E} \in$ tous les plans de symétrie

$$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e_r}$$

a) d'après le théorème de gauss:

$$\oiint_{(S)} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\tau} \rho\, d\tau$$

$$\oiint_{(S)} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oiint_{(S)} E(r)\,\vec{e_r}\cdot dS\,\vec{e_r}$$

$$= E(r)\oiint_S dS = 4\pi r^2 E(r)$$

Si $r > R$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\tau} \rho\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho\, d\tau$$

$$= \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,\frac{4\pi}{3}\,R^3$$

3

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\vec{e_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e_r}$$

si $r < R$ :

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_\tau \rho\, d\tau = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4\pi}{3}r^3$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,\vec{e_r}$$

b) la forme locale de th. de Gauss.

$r < R$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad E\begin{cases} E_r(r) \\ E_\theta(\theta) = 0 \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{d r^2 E_r}{dr}$$

$$\Rightarrow d(r^2 E_r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2\, dr$$

$$r^2 E_r = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0} + cte$$

pour $r = 0$ : $\quad 0 = 0 + cte \Rightarrow cte = 0$

$$r^2 E_r = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,\vec{e_r}$$

$r > R \quad \rho = 0$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2 E_r)}{dt} = 0 \Rightarrow r^2 E_r = cte \Rightarrow E_r = \frac{cte}{r^2}$$

continuité de $E_r$ en $r = R$ (car $\sigma = 0$)

$$\frac{cte}{R^2} = \frac{2\rho}{3\varepsilon_0} \Rightarrow cte = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}$$

④

$$E_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r^2}$$

donc : $E(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$

Exercice 3 :

$\sigma = \sigma_0 \cos\theta$

$$\varphi = \int_{S.\,sphère} d\varphi = \int_{\frac{1}{2} S.\,sphère} d\varphi(P) + d\varphi(P') = 0$$

$$\varphi = \int_{sphère} d\varphi = \iint \underbrace{\sigma_0 \cos\theta}_{\sigma} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \sigma_0 R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= 2\pi \sigma_0 R^2 \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 0$$

Le moment dipolaire

$\vec{p} = \sum q_i \cdot \overrightarrow{OP_i}$ $\quad \vec{p} = \int_{sphère} d\varphi(P)\, \overrightarrow{OP}$ (distribution continue)

- La seule transf géom qui laisse le système invariant est la rotation autour de $\overrightarrow{Oz}$

$\Rightarrow$ le syst a une sym axiale

$\vec{p}$ est un vecteur polaire

$\vec{p} \perp$ P.A.S $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ et $\vec{p} \in$ P.S (tout les plans contenant $\overrightarrow{Oz}$)

$\vec{p}(O) = p\, \vec{e_z}$

$$\vec{p} \cdot \vec{e_z} = \int_{sphère} d\varphi(P)\, \overrightarrow{OP} \cdot \vec{e_z}$$

$$= \sigma_0 R^3 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

5

$$= 2\pi \sigma_0 R^3 \left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi \sigma_0 R^3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 R^3$$

$$\vec{p} = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 R^3 \vec{e_z}$$

2ème méthode :

$$d\vec{p}(P, P') = (\sigma_0 \cos\theta \, dS)(2R\cos\theta)\vec{e_z}$$

$$dS = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$d\vec{p}(P, P') = (\sigma_0 \cos\theta \, R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi) 2R\cos\theta \, \vec{e_z}$$

$$= \sigma_0 2R^3 \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e_z}$$

$$d\vec{p} = 2R^3 \sigma_0 \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \vec{p}(0) = 2R^3 \sigma_0 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e_z}$$

$$= 2R^3 \sigma_0 2\pi \left[\frac{-\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} \vec{e_z}$$

$$\vec{p}(0) = \frac{4\pi}{3} R^3 \sigma_0 \vec{e_z}$$

## Exercice 4

1) $\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P}$ $\qquad \sigma_p = \vec{P}(\varphi) \cdot \vec{n_i}$ $\qquad P \begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = 0 \\ P_z = P \end{cases}$

$$\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\sigma_{P_1} = P\vec{e_z} \cdot \vec{e_z} = P \qquad \sigma_{P_2} = Pe_z(-\vec{e_z}) = -P$$

$$\sigma_{P_L} = P\vec{e_z} \cdot \vec{e_r} = 0$$

$P \perp n_L$

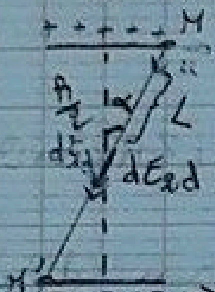
2) le champ électrique $\vec{E}_d$ :

Symétrie axial

$\vec{E}_d \in$ P.S (plan contenant $Oz$)

$\vec{E}_d \perp$ P.A.S $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$

donc : $E_d(O) = E_d \vec{e_z}$




$$d\vec{E}_d(O) = dE_{1d}\vec{e_z} + d\vec{E}_{2d}\vec{e_z}$$

$$d\vec{E}_{1d} = d\vec{E}_{d2}$$

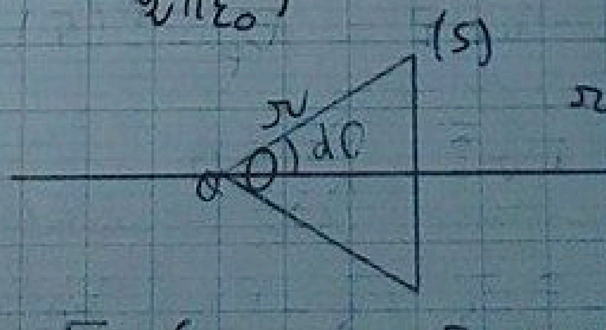
$$d\vec{E}_d(O) = 2\, dE_{1d}\vec{e_z} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sigma_P\, dS}{L^2}\right)\vec{u}\cdot\vec{e_z}$$

$$= \frac{-\sigma_{P_1}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{(dS\,\vec{e_z})(-\vec{u})}{L^2}$$

$$= -\frac{\sigma_{P_1}}{2\pi\varepsilon_0}\, d\Omega$$

avec $d\Omega = \dfrac{dS\,\vec{e_z}(-\vec{u})}{L^2}$ (Angle solide)

$$E_d = -\frac{\sigma_{P_1}}{2\pi\varepsilon_0}\int d\Omega$$




$$\Omega = 2\pi(1-\cos\alpha)$$

$$E_d = \frac{-\sigma_{P_1}}{2\pi\varepsilon_0}\int d\Omega = -\frac{P}{2\pi\varepsilon_0}2\pi(1-\cos\alpha)$$

$$= -\frac{P}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h/2}{\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 + R^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

7

autre Méthode :

$$dE_d = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_{pn}\,dS}{L^2}\,\vec{u}\cdot\vec{e_z}$$

$$= -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_{pn}\,dS}{L^2}\cos\alpha \qquad dS = 2\pi r\,dr$$

$$\tan\alpha = \frac{r}{R/2} \Rightarrow dr = \frac{R}{2}\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad \cos\alpha = \frac{R/2}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L^2} = \frac{\cos^2\alpha}{R^2/4}$$

$$dE_d = \frac{-\sigma_p}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos^2\alpha}{R^2/4}\,2\pi\,\frac{R}{2}\,tg\,\alpha\,\frac{R}{2}\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}\cos\alpha$$

$$= -\frac{\sigma_{p1}}{\varepsilon_0}\sin\alpha\,d\alpha = \frac{\sigma_{p1}}{\varepsilon_0}(\cos\alpha - 1)$$

Exercice 5 :

① $\vec{P} = P_0 \frac{\vec{e_r}}{r^2}$

$\rho_P(M) = -\operatorname{div} \vec{P}(M)$

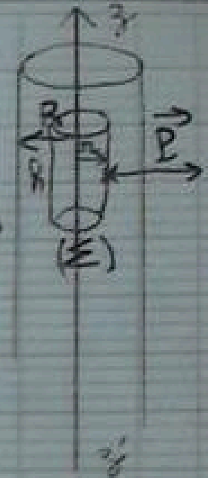
$\sigma_P(\varphi') = \vec{P}(\varphi') \vec{n}(\varphi')$

$\Downarrow$

$P_r(r) \neq 0$

$P_\theta = 0$

$P_z = 0$



$\rho_P(M) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{P_0}{r^2}\right) = \frac{P_0}{r^3}$

Bases : $\sigma_P = \frac{P_0}{r^2} \vec{e_r} \cdot (\pm \vec{e_z}) = 0$

surf. lat : $\sigma_P = \frac{P_0}{R^2} \vec{e_r} \cdot \vec{e_r} = \frac{P_0}{R^2}$

②

Invariance de syst par translation le long de $\vec{Oz}$ et par rotation autour de Oz car $\rho_P$ ne depend que de r et $\sigma_P = cte \Rightarrow$ le syst. a une sym cylindrique $\Rightarrow \vec{E}(M : r, \theta, z) = \vec{E}(r)$

$\vec{D}(M : r, \theta, z) = \vec{D}(r)$

- le plan $(M; \vec{e_r}, \vec{e_z})$ est un P.S
- " $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ est un P.S

$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r) \vec{e_r}$

$\vec{D}(M) = D(r) \vec{e_r}$

③

Th. Gauss : $\oint\!\!\oint_{(\Sigma)} \vec{D} \cdot \vec{dS} = \sum_{dq} q_{l\,int} \text{ à } \Sigma = 0$

$= \iint_{S_{lat}} \vec{D} \cdot \vec{dS} + \underbrace{\iint_{S_1} \vec{D} \cdot \vec{dS}}_{= 0 \text{ car } \vec{D} \perp \vec{dS}} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{D} \cdot \vec{dS}}_{= 0 \text{ car } \vec{D} \perp \vec{dS}} = 0$

$\Rightarrow \iint_{S_{lat}} D(r) \vec{e_r} \cdot dS \vec{e_r} = 0$

$\Rightarrow D(r) \cdot \underbrace{\iint dS}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow D(r) = 0$

9

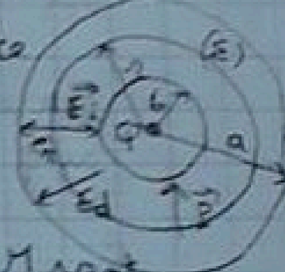
on a : $\vec{D}(M) = \varepsilon_0 \vec{E}(M) + \vec{P}(M)$

dans notre cas : $\vec{D}(M) = \varepsilon_0 \vec{E}(M) + \vec{P}(M) = 0$

⇓

donc : $\vec{E}(M) = -\dfrac{\vec{P}(M)}{\varepsilon_0}$

Exercice 6 :



① le syst est invariant par toute rotation autour du centre de la sphère car $\varphi$ est ponctuelle et le dielec. est homogène

$\vec{E}(M:r,\theta,\varphi) = \vec{E}(r)$

$\vec{D}(M;r,\theta,\varphi) = D(r) \Leftarrow$

– tout les plans contenant OM sont des P.S

$\vec{E}$ et $\vec{D}$ est des vect polaire $\Rightarrow \vec{E}$ et $\vec{D} \in$ P.S

$\Rightarrow \vec{D}(M) = D(r)\,\vec{e_r}$

$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e_r}$

②

Th. Gauss : $\displaystyle\oiint_{(\Sigma)} \vec{D_1} \cdot \vec{dS} = \sum_{dq} q$ intérieur à $\Sigma = \varphi$

$$\oiint_{\Sigma} D_1(r)\,\vec{e_r} \cdot dS\,\vec{e_r} = \varphi \Rightarrow D_1(r) \underbrace{\oiint_{(\Sigma)} dS}_{4\pi r^2} = \varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{D_1}(r) = \frac{\varphi}{4\pi r^2}\,\vec{e_r}}$$

– en déduire $\vec{E}(M)$.

on a : $\vec{D_1}(M) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E_1}(M)$

$$\Rightarrow \vec{E_1}(M) = \frac{\vec{D_1}(M)}{\varepsilon_0 \varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{\varphi}{r^2}\,\vec{e_r}$$

10

③ $\vec{D_1}(M) = \varepsilon_0 \vec{E_1}(M) + \vec{P}(M)$

$\Rightarrow \vec{P}(M) = \frac{Q}{4\pi r^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\vec{e_r} \Rightarrow \vec{P}(M) \neq 0$ donc ...

④ a) $\rho_P(M) = -\operatorname{div}\vec{P}(M) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 \cdot P_r)$

$= 0$

$\sigma_P(Q') = \vec{P}(Q') \cdot \vec{n}(Q')$ définition

$\sigma_{P_1}(r=a) = \frac{Q}{4\pi a^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\vec{e_r} \cdot \vec{e_r}$

$= \frac{Q}{4\pi a^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$

$\sigma_{P_2}(r=b) = \frac{Q}{4\pi b^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\vec{e_r} \cdot (-\vec{e_r})$

$\sigma_{P_2} = -\frac{Q}{4\pi b^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$

b) $Q_{P_1} = \sigma_{P_1} \cdot 4\pi a^2 = Q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$

$Q_{P_2} = \sigma_{P_2} 4\pi b^2 = -Q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = -Q_{P_1}$

$\Rightarrow Q_P = Q_{P_1} + Q_{P_2} = 0$

⑤ Th de Gauss : $\oiint_{(\Sigma)} \vec{E_d} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{P_2}$

11

$$\vec{E_d}(r) \oiint_{sphère(Gb)} \vec{dS} = \frac{Q_{p_2}}{\varepsilon_0}$$ $4\pi r^2$

$$\vec{E_d}(M) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_0}\right)\frac{Q}{r^2}\vec{e_r}$$

⑥

$r > a$ :

$$\vec{D_e} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{e_r}$$

$$\vec{E_e} = \frac{\vec{D_e}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- la discontinuité pour $(r = a)$

cours $\Delta D_N = \sigma$ , $\Delta E_t = 0$

$$\Delta\vec{D_N} = \vec{D_e}(r=a) - \vec{D_i}(r=a)$$
$$= \vec{0} \text{ en conformité avec le cours}$$

$$\Delta\vec{E} = \vec{E_e}(r=a) - \vec{E_i}(r=a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{e_r} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r a^2}\vec{e_r}$$

$$\Delta\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\vec{e_r} \neq \vec{0}$$

⑦

$$\frac{dW_e}{d\tau} = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \underset{L.H.I}{=} \frac{\varepsilon E^2}{2} = f(r)$$

$$W_e = \iiint_{sphère} \frac{\varepsilon E^2}{2} d\tau = \int_b^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon E^2}{2} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr \, d\varphi$$

ou :

$$W_e = \int_b^a \frac{\varepsilon E_i^2}{2} 4\pi r^2 dr$$ (car $dW_e$ dépend que de $r$)

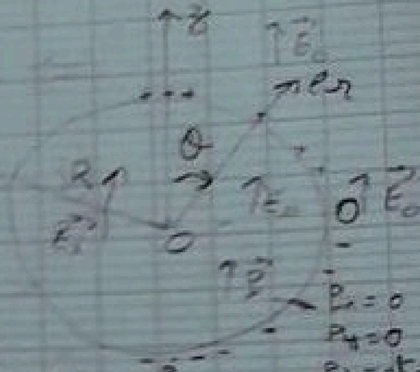
$$= \int_b^a \frac{\varepsilon}{2} \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon)^2 r^4} \times 4\pi r^2 dr$$

(1-2)

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\int \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_b^a$$

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right]$$

## Exercice 7 :



① $\vec{E_i} = \vec{E_d} + \vec{E_0}$ uniforme

uniforme

$\Rightarrow \vec{E_d}$ uniforme $= \vec{E_d}(O)$

$\rho_p = -\mathrm{div}\,\vec{P} = -\frac{dP}{dz} = 0$ (pas de charges de polarisation en volume)

$$\sigma_p(Q') = \vec{P}(Q')\cdot\vec{n}(Q')$$
$$= P\,\vec{e_z}\cdot\vec{e_r} = P\cos\theta$$

- la sphère est équivalente à un dipôle électrostatique
- le plan $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ est un P.A.S $\Rightarrow \vec{E_d}(O) = E_d(O)\,\vec{e_z}$

$$d\vec{E}_{d_1}(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{P\cos\theta\,.ds}{R^2}\,(-\vec{e_r})$$

$$d\vec{E}_{d_1}(O)\cdot\vec{e_z} = dE_d(O)$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{-P\cos^2\theta}{R^2}\,R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = dE_d(O)$$

$$E_d(O) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-P\cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$= \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\,2\pi\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{P}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E_d}(O) = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}}$$

13

$$\vec{E}_i = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} + \vec{E}_0$$

$$\vec{D}_i = \varepsilon \vec{E}_i = -\frac{\varepsilon \vec{P}}{3\varepsilon_0} + \varepsilon \vec{E}_0 \quad (\text{L.H.I})$$

$$= \varepsilon_0 \vec{E}_i + \vec{P}$$

$$\Longrightarrow -\frac{\varepsilon \vec{P}}{3\varepsilon_0} + \varepsilon \vec{E}_0 = -\frac{\vec{P}}{3} + \varepsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}$$

$$(\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_0 = \vec{P}\left(\frac{2}{3} + \frac{\varepsilon}{3\varepsilon_0}\right)$$

$$\Longrightarrow \vec{P} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon}\vec{E}_0$$

$$\vec{E}_i = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\vec{E}_0 \quad ; \quad \vec{D}_i = \frac{3\varepsilon\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\vec{E}$$

## Exercice 7

Champ uniforme $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_z \to$ P uniforme $\vec{P} = P\,\vec{e}_z$ $\begin{cases} \rho_P = -\vec{\nabla}\bullet\vec{P} = 0 \\ \sigma_P = \vec{P}\bullet\vec{n} \quad \text{avec } n = \vec{e}_r \Rightarrow \sigma_P = P\cos(\theta) \end{cases}$

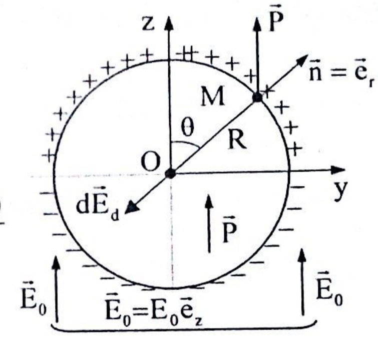
A l'intérieur de la sphère le champ total est : $\vec{E}_i = \vec{E}_0 + \vec{E}_d$ uniforme $\Rightarrow \vec{E}_d$ uniforme

$\vec{E}_d$ est le champ créé par les charges de polarisation appelé champ dépolarisant.

Pour déterminer $\vec{E}_i$ il suffit donc de calculer $\vec{E}_d(O)$ au point O

$O \in PAS = xOy \Rightarrow \vec{E}_d(O) \perp PAS$ Soit $\vec{E}_d(O) = E_d(O)\vec{e}_z$

Rappel $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{u}}{r^2} \Rightarrow d\vec{E} = \dfrac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{u}}{r^2}$




$dQ_P = \sigma_P\, dS$ ; $\sigma_P = P\cos(\theta)$ ; $r = R$ ; $dS = R^2\sin(\theta)d\theta d\varphi$ ; $\vec{u} = -\vec{e}_r$

champ créé par $\sigma_P dS$ en O : $d\vec{E}_d(O) = \dfrac{\overbrace{P\cos(\theta)}^{\sigma_P}\ \overbrace{R^2\sin(\theta)d\theta d\varphi}^{dS}}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{(-\vec{e}_r)}{R^2}$

$\vec{E}_d(O) = E_d(O)\vec{e}_z \Rightarrow E_d(O) = \vec{E}_d(O)\bullet\vec{e}_z \to dE_d(O) = d\vec{E}_d(O)\cdot\vec{e}_z$

$\vec{e}_r\bullet\vec{e}_z = \cos(\theta) \Rightarrow dE_d(O) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{-P\cos^2(\theta)\ R^2\sin(\theta)d\theta d\varphi}{R^2}$

$$E_d(O) = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\cos^2(\theta)\sin(\theta)d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = -\frac{P}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\cos^3(\theta)}{3}\right)_0^{\pi} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_d(O) = \frac{-\vec{P}}{3\varepsilon_0}}$$

Conforme au faite que $\vec{E}_d(O)$ s'opposé au champ polarisant $\vec{E}_0$.

Sphère (diélectrique l.h.i) : $\vec{D}_i = \varepsilon_0\vec{E}_i + \vec{P} = \varepsilon\,\vec{E}_i \Rightarrow \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_i = \varepsilon_0\chi\,\vec{E}$

$(\varepsilon_r\varepsilon_0 - \varepsilon_0)\vec{E}_i = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_i = \varepsilon_0\chi\,\vec{E}$

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\left(\vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right) \to \frac{\vec{P}}{(\varepsilon - \varepsilon_0)} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} = \vec{E}_0 \Rightarrow \boxed{\vec{P} = 3\varepsilon_0\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{(\varepsilon + 2\varepsilon_0)}\vec{E}_0}$$

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 + \vec{E}_d = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_i = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\vec{E}_0 \quad \text{et} \quad \vec{D}_i = \frac{3\varepsilon\,\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\vec{E}_0}$$

$\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_z = E_0[\vec{e}_r\cos(\theta) - e_\theta\sin(\theta)]$

2) a: $V_P(M) = \dfrac{\vec{p}\bullet\overrightarrow{OM}}{4\pi\varepsilon_0\ (OM)^3} = \dfrac{\vec{p}\bullet\vec{u}}{4\pi\varepsilon_0\ r^2}$ ; $\vec{p} = p\,\vec{e}_z$ et $\vec{u} = \vec{e}_r \Rightarrow \boxed{V_P(M) = \dfrac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0\ r^2}}$

b: Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en un point M s'écrit en utilisant les coordonnées sphériques.
$\vec{p}$ est un vecteur constant(en direction et en amplitude : charges immobiles exigent)

$$\vec{E}_P(M) = -\vec{\nabla}V_P(M)\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{2p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta} = \dfrac{p\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{D}_P(M) = \varepsilon_0\vec{E}_P(M)}$$

A l'extérieure le champ s'écrit: $\vec{E}_e(M) = \vec{E}_0 + \vec{E}_P(M)$ et $\vec{D}_e(M) = \varepsilon_0 \vec{E}_e(M)$

$$\vec{E}_e(M) = \begin{cases} E_{er} = \vec{E}_0 \cos(\theta) + \dfrac{2p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_{e\theta} = -\vec{E}_0 \sin(\theta) + \dfrac{p\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_{e\varphi} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{D}_e(M) = \varepsilon_0 \vec{E}_e(M)}$$

3) a: Absence de densité de charge surfacique libre $\Rightarrow$ Continuité de la composante normale de $\vec{D}$

Pour $r = R \Rightarrow \varepsilon_0 \left( E_0 \cos(\theta) + \dfrac{2p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \right) = \dfrac{3\varepsilon\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cos(\theta)$

$$\frac{2p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = E_0 \cos(\theta) \left( \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} - 1 \right) = E_0 \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \right) \cos(\theta) \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}}$$

b : Continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$

$$\left.\begin{aligned} -E_0 \sin(\theta) + \frac{p\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 R^3} &= -E_0 \sin(\theta) + \frac{P\sin(\theta)}{3\varepsilon_0} \\ -E_0 \sin(\theta) + \overbrace{\frac{4}{3}\pi R^3 P}^{p} \frac{\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 R^3} &= -E_0 \sin(\theta) + \frac{P\sin(\theta)}{3\varepsilon_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{Continuité de la composante tangentielle de } \vec{E} \text{ verifieé}}$$